О разрешимости двух задач с нелинейными граничными условиями для гиперболического уравнения

Л.С. Пулькина
Самарский государственный университет

Задачи с нелинейными граничными условиями для эллиптических и параболических уравнений изучались многими авторами, в то время как работ, посвященных таким задачам для гиперболических уравнений, очень мало. Однако простейшие примеры показывают необходимость таких исследований: задача о колебании струны в случае упругого закрепления одного из концов, не подчиняющегося закону Гука, приводит к условию $u_x(l,t) = F[u(l,t)]$ [1]. Обобщение этой модели привело к постановке следующих задач:

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим $Q_T = \Omega\times(0,T)$ — цилиндр с боковой границей $S_T = \partial\Omega\times(0,T)$, ν — вектор внешней нормали к S_T в текущей точке. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим следующие задачи:

Задача 1. *Найти в прямоугольнике Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} + |u|^\rho u = 0, \quad (x,t)\in S_T. \tag{3}$$

Задача 2. *Найти в прямоугольнике Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным*

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{4}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} + |u_t|^\rho u_t, \quad (x,t)\in S_T. \tag{5}$$

Прежде всего уточним, что мы будем понимать под решением задачи. Введем следующие обозначения.

$$W = \{u(x,t) : u\in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_p(S_T), \quad u_t\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\},$$

$$\hat{W} = \{v(x,t) : v \in W, v(x,T) = 0\}, \quad p = \rho + 2.$$

Определение. Решением задачи 1 назывем функцию $u(x,t) \in W$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = \varphi(x)$ и $\forall v(x,t) \in \hat{W}$ тождеству

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_t v_t + \nabla u \nabla v + cuv)dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} |u|^\rho uvdsdt = \int_\Omega \psi v dx + \int_0^T \int_\Omega fvdxdt \tag{6}$$

Теорема 1. Если

$$f(x,t) \in L_2(Q_T), \; c(x,t) \in C(\bar{Q}_T), \; \varphi(x) \in W_2^1(\Omega) \cap L_p(\partial\Omega),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + |\varphi|^\rho \varphi = 0, x \in \partial\Omega, \; \psi(x) \in L_2(\Omega),$$

то для $0 < \rho \le \frac{2}{n-2}$, если $n > 2$, и для любого $\rho > 0$ для $n = 2$ существует единственное решение задачи 1.

Наличие производной в краевом условии (5) требует большей гладкости решения, поэтому ее разрешимость доказана в другом пространстве. Введем следующие обозначения.

$$U = \{u(x,t) : u \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)), u_t \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)) \cap L_p(S_T), u_{tt} \in L_2(\Omega)\}.$$

Решением задачи 2 назывем функцию $u(x,t) \in U$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = 0$ и $\forall v(x) \in W_2^1(\Omega) \cap L_p(\partial\Omega)$, $\vartheta(t) \in C^1(0,T)$, $\vartheta(T) = 0$ тождеству

$$\int_0^T \left\{ \int_\Omega (u_{tt} v + \nabla u \nabla v + cuv)dx + \int_{\partial\Omega} |u_t|^\rho u_t v ds \right\} \vartheta(t)dt = \int_0^T \int_\Omega fv\vartheta dxdt \tag{7}$$

Теорема 2. Если

$$f(x,t) \in L_2(Q_T), f_t(x,t) \in L_2(Q_T), \; c(x,t) \in C(\bar{Q}_T), \; c_t(x,t) \in C(\bar{Q}_T),$$

то для $0 < \rho \le \frac{2}{n-2}$, если $n > 2$, и для любого $\rho > 0$ для $n = 2$ существует единственное решение задачи 2.

Список литературы

[1] Тихонов А.Н.,Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966.

[2] Пулькина Л.С. Задачи с нелинейными граничными условиями для гиперболического уравнения. //Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2012, т. 278, с. 208-216.