МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ДИНАМИКЕ НЕОДНОРОДНЫХ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ СРЕД

В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, ragozina@vlc.ru, ivanova@iacp.dvo.ru

Нестационарные процессы интенсивного деформирования твердых тел, сопровождаемые образованием и распространением ударных волн, могут быть описаны только на основе нелинейных математических моделей. Наиболее простая из них — модель нелинейно упругой изотропной среды. Для этой модели известно, что в общем случае волновые процессы не могут быть разделены на чисто продольные или поперечные и приобретают смешанный характер. На движение передних фронтов ударных волн оказывают влияние предварительные деформации среды, волновая интенсивность, послеударное воздействие на нагружаемых поверхностях, а также геометрические характеристики волновой поверхности. Перечисленные свойства краевых задач с поверхностями сильных разрывов, за исключением автомодельных постановок, не позволяют получать точные аналитические решения. Поэтому в качестве метода исследования волновых процессов был выбран метод сращиваемых асимптотических разложений. На практике зачастую необходимы сведения о характере и закономерностях движения ударных волн в массивах большой протяженности, для которых необходимо учесть возможную неоднородность среды.

В настоящей работе рассматривается задача о плоской продольной ударной волне с учетом неоднородности нелинейно-упругой среды в направлении движения волны. Слабая неоднородность задавалась линейной зависимостью упругих модулей среды и плотности среды от пространственной переменной. Полагая, что следствием ударного нагружения является поле перемещений $u_1(x_1,t)\neq 0,\ u_2=0,\ u_3=0$, выпишем уравнение движения среды

$$\left(\lambda+2\mu+2\alpha u_{1,1}\right)u_{1,11}+\left((\lambda+2\mu)_{,1}+\alpha_{,1}u_{1,1}\right)u_{1,1}+\ldots=\frac{\rho_0}{(1-u_{1,1})^2}\left\{\ddot{u}_1(1-2u_{1,1})+2\dot{u}_{1,1}\dot{u}_1\right\}+\ldots.\qquad(1)$$

В безразмерных переменных $s=\dfrac{x_1}{C_1T},\ m=\dfrac{t}{T},\ w(s,m)=\varepsilon^{-1}\dfrac{u_1}{C_1T}$ получим внешнее разложение решения задачи:

$$w(s,m)=f(\xi)+\varepsilon\left\{-\frac{\alpha_0}{4}\left(f'(\xi)\right)^2 s+f'(\xi)f_1(\xi)\right\}+\ldots,\quad \xi=m-s\geq 0,\qquad(2)$$

где $\alpha_0=const$, $f(\xi)$ — известная функция краевого условия на границе полупространства. В рассматриваемом случае отметим, что неоднородные свойства сказываются на внешнем решении, начиная с $w_2(s,m)$. Так как ряд (2) при $\xi : 1$ теряет равномерность при $s : \varepsilon^{-1}$, то переменными внутреннего решения выберем $n=\varepsilon s,\quad p=s-m,\quad w=w(p,n)$. Предполагая представление $w(p,n)$ рядом по степеням

ε и записывая уравнение (1) в новых переменных, на пулевом шаге метода получим нелинейное уравнение

$$v_{0,n} + \left(\frac{\alpha_0}{2} v_0 + \gamma n \right) v_{0,p} = 0, \quad v_0 = w_{0,p}, \tag{3}$$

которое назовем эволюционным уравнением для рассматриваемого баланса нелинейности и неоднородности. Здесь γ — константа, отвечающая за неоднородные свойства среды. Оно переходит в уравнение Коула-Хопфа при $\gamma = 0$. Переход к этому уравнению оказался возможен только за счет изменения масштаба координаты s. В уравнении (3) видно, что тангенс угла наклона его характеристик определяется аддитивно нелинейными слагаемыми и слагаемыми, обусловленными неоднородностью. Вдоль характеристик здесь не происходит искажение исходного импульса, и общее решение задается как

$$v_0 = F_0\left(p - \frac{\alpha_0}{2} v_0 n - \frac{\gamma}{2} n^2 \right), \tag{4}$$

то есть характеристики уравнения (4) в плоскости p, n — семейство парабол. Для определения положения переднего фронта продольной ударной волны из уравнения эйконала $t = \int_0^{x_1} G_1^{-1}(y)dy$ в переменных p, n получим такое обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp_0}{dn} = \frac{\alpha_0}{4} v_0(p_0(n), n) + \gamma n, \quad p_0(0) = 0, \tag{5}$$

где $p(n) = p_0(n) + \varepsilon p_1(n) + \ldots$ — асимптотический ряд, связывающий координаты p, n на ударной волне. Из уравнения (5) следует, что в данном случае отклонение ударной волны от характеристики определяется только нелинейным фактором.

Для данной задачи в качестве достаточно простого примера нагружения на границе полупространства было рассмотрено краевое условие в виде квадратичной функции времени.

Учет неоднородных свойств сплошной среды даже в наиболее простой форме вносит новые интересные особенности как в структуру эволюционного уравнения и его решений, так и в методы их получения. Авторы считают, что эта методика может оказаться полезной и в других динамических нелинейных задачах. Прикладной аспект рассмотренных решений авторы видят в их применении при моделировании новых схем численного счета динамических нестационарных задач.