МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ О НАПРАВЛЕННОМ ИЗЛУЧАТЕЛЕ В НЕОДНОРОДНОМ ПО ВЕРТИКАЛИ СЛОЕ

И. В. Семенова

Самарский государственный университет,
semenirina@list.ru

Анализ структуры реальных сред показал, что получить более точный результат можно представляя неоднородное пространство в виде системы слоев, в одном из которых находится источник, а в качестве модели такого пространства рассматривать однородный или неоднородный волновод с неидеальными границами.

Решение задачи о поле излучателя в слое представляет интерес для различных областей физики: атмосферной и подводной акустики, сейсмологии.

Очевидным преимуществом моделирования непрерывно-слоистых сред системой однородных слоев является точность полученных результатов. Однако существенным недостатком такого подхода являются вычислительные сложности, возникающие из-за необходимости вводить большое количество слоев. Избежать этих затруднений позволяет представление таких областей в виде системы неоднородных слоев, в каждом из которых закон изменения квадрата показателя преломления допускает точное решение вспомогательного дифференциального уравнения.

Рассмотрим точечный излучатель, потенциал которого в неограниченном пространстве определяется функцией, описанной в [1], находящийся в многослойной области, состоящей из неоднородных слоев $\Omega_1 ... \Omega_m ... \Omega_{m+n}$. Каждый слой Ω_i имеет неидеальные границы Σ_i и Σ_{i+1} и характеризуется толщиной d_i, а также линейным законом изменения квадрата показателя преломления. Таким образом, в качестве модели вертикального распространения $n^2(z)$ будем рассматривать кусочно-линейную зависимость вида

$$n^2(z) = \begin{cases} 1 + q_1 z, z \in \Omega_1 \\ 1 + q_1 d_1 + q_2 (z - d_1), z \in \Omega_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 1 + \sum_{l=1}^{i-1} q_l d_l + q_i (z - \sum_{l=1}^{i-1} d_l), z \in \Omega_i \\ \dots\dots\dots\dots \\ 1 + \sum_{l=1}^{m+n-1} q_l d_l + q_{m+n} (z - \sum_{l=1}^{m+n-1} d_l), z \in \Omega_{m+n} \end{cases} \tag{1}$$

где q_i - значения вертикального градиента изменения квадрата показателя преломления в слое с номером i, которые определяются из практических данных.

Пусть рассматриваемый модельный излучатель находится в точке $r = 0, z = z_1, z_1 > 0$ слоя Ω_m на расстоянии z_0 от его верхней границы. Поле давления, создаваемое рассматриваемым источником внутри полупространства, описывается функцией, которая является решением следующей краевой задачи:

найти функцию $\psi(r, \theta, \varphi)$, которая удовлетворяет

1) уравнению Гельмгольца $\Delta\psi + k^2(z)\psi = 0$ (2)
2) однородному граничному условию первого рода для абсолютно мягкой границы

$$\psi(r,\theta,\varphi)_{|\Sigma_m} = 0 \tag{3}$$

однородному граничному условию второго рода для абсолютно жесткой границы

$$\left(\frac{\partial\psi(r,\theta,\varphi)}{\partial z}\right)_{|\Sigma_m} = 0 \tag{4}$$

3) предельному краевому условию $\lim\limits_{r\to 0} r\,|\,\psi(r,\theta,\varphi) - \psi_0(r,\theta,\varphi)\,| = 0$ (5)

Общее решение задачи (2), (3), (5) имеет следующий вид

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{2i}{k_0}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n}\chi_{nm}D_{nm}I_{nm}(r,\theta)e^{im\varphi}, \tag{6}$$

$$I_{nm}(r,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(1)}(\xi\rho)P_n^{|m|}\left(\frac{b}{ik_0}\right)\frac{\widetilde{\varphi}_1(z_1,\xi)\widetilde{\varphi}_2(z,\xi)\xi d\xi}{W(\widetilde{\varphi}_1,\widetilde{\varphi}_2)} \text{ для } z \ge z_1,$$

$$I_{nm}(r,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(1)}(\xi\rho)P_n^{|m|}\left(\frac{b}{ik_0}\right)\frac{\widetilde{\varphi}_2(z_1,\xi)\widetilde{\varphi}_1(z,\xi)\xi d\xi}{W(\widetilde{\varphi}_1,\widetilde{\varphi}_2)} \text{ для } z < z_1,$$

$$\varphi(z,\theta) = \begin{cases} e^{ikz\cos\theta} + V(\theta)e^{-ikz\cos\theta}, z < 0 \\ A_1u(t_1) + B_1v(t_1), z \in \Omega_1 \\ A_2u(t_2) + B_2v(t_2), z \in \Omega_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_iu(t_i) + B_iv(t_i), z \in \Omega_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{m+n}v(t_{m+n}), z \in \Omega_{m+n} \end{cases} \tag{7}$$

$W = \widetilde{\varphi}_1'(z)\widetilde{\varphi}_2(z) - \widetilde{\varphi}_2'(z)\widetilde{\varphi}_1(z)$, $\chi_{nm} = (-1)^{n+m}$, $\xi = k_0\sin\beta$, $b = i\sqrt{k_0^2 - \xi^2}$, $u(t), v(t)$ - функции Эйри, коэффициенты A_i, B_i определяются из условий непрерывности $\varphi(z)$ и $\partial\varphi(z)/\partial z$ на границах слоев.

Таким образом, найдя значения $\widetilde{\varphi}_1'(z)\widetilde{\varphi}_2(z)$ функций $\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2$ в виде (7) и подставив их в (6), получим выражение для поля направленного излучателя в неоднородном слое с квадратом показателя преломления (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов А.Н.* Мультипольная модель гидроакустических источников. Самара: Изд-во «Самарский унтверситет», 2000. 212 с.