К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ РАЗНОМОДУЛЬНЫХ СВОЙСТВ ДЕФОРМИРУЕМОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

О. В. Дудко, А. А. Лаптева

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, dudko@iacp.dvo.ru, lanastal@mail.ru

В современной технике (машиностроении, строительном деле и т.д.) повсеместно применяются как традиционные, так и новые конструкционные материалы, которые даже в области упругих деформаций дают различный механический отклик на противоположные по направлению нагрузки. Разномодульные свойства таких сред вносят в процессы распространения граничных возмущений определенные качественные особенности, которые следует учитывать при постановке и решении краевых задач.

В механике деформируемого твердого тела существует целый ряд способов построения нелинейных математических моделей, позволяющих учитывать разномодульность (сингулярность) деформационного отклика среды. Так, в [1] предложена модель упрочняющейся среды, приобретающей объемную анизотропию деформационных свойств на стадии пластического деформирования. В [2] построена модель изотропной упругой среды с различным сопротивлением растяжению и сжатию, описывающая дилатирующие материалы. В [3] разномодульность задается упругими константами, скачком меняющими свое значение при изменении знака деформаций. В представленном исследовании развиваются подходы, предложенные для разномодульных изотропных упругих сред в [2, 3].

Модель [2] основана на разложении упругого потенциала в ряд по сферическим функциям

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1 \sqrt{I_2}, \qquad (1)$$

где $I_1 = e_{kk}$, $I_2 = e_{ik} e_{ki}$, $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j})$; u_i – компоненты вектора перемещений точек среды; коэффициенты λ, μ являются параметрами Ламе, упругий модуль $\nu > 0$ характеризует наличие микродефектов в материале (или степень разрушенности материала, если рассматриваются горные породы). Функция (1) приводит определяющие соотношения модели к кусочно-непрерывной зависимости между напряжениями и деформациями с особенностью в области свободного состояния (в случае $\nu = 0$ – к известному закону Гука). Показано [4], что даже в рамках линейного приближения в случае одноосного деформирования наряду с простыми разрывами в такой среде могут возникать нелинейные эффекты – плоские одномерные ударные волны, покоящиеся и движущиеся области постоянных перемещений. Однако при переходе к криволинейным координатам потенциал (1) существенно усложняет определяющие соотношения и не позволяет воспользоваться классическим математическим аппаратом теории при решении простейших краевых задач. Это обстоятельство заставляет искать альтернативные пути построения определяющих соотношений.

В [5] предложен упругий потенциал, включающий отличную от (1) разномодульную добавку – слагаемое с модулем первого инварианта тензора деформаций:

$$W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \nu I_1 |I_1|. \qquad (2)$$

Такая форма упругого потенциала (2) позволила исключить свойство дилатансии при построении определяющих соотношений модели. В случае сферической симметрии такое описание разномодульных свойств среды, с одной стороны, позволяет воспользоваться классическим сферическим оператором одномерного уравнения движения, а с другой, приводит к специфическим особенностям в возникновении и распространении сферических волновых фронтов, не характерным для плоских волн. В задаче о движении границы разномодульной сферы по типу «всестороннее сжатие – растяжение» построено обобщенное решение со слабыми сходящимися волнами, образующими слой постоянной плотности, при этом возникновение такого слоя происходит позже смены направления перемещений точек сферической поверхности (эффект «запаздывания») [5].

Помимо сред с объемными разномодульными свойствами, большой интерес представляют материалы с различным сопротивлением сдвигу в противоположных направлениях вдоль выбранной оси (например, волокнистые композиты, металлопрокат, материалы с памятью формы и т.п.). Для моделирования подобных механических свойств в [6] использован способ, основы которого определены в [3], когда разномодульность задается упругими константами, скачком меняющими свое значение при изменении знака деформаций:

$$W = \alpha I_1^2 + \beta^{\pm} I_2. \tag{3}$$

Двухконстантная кусочно-линейная модель (3) позволяет задать разномодульные свойства среды без учета взаимодействия объемных и сдвиговых деформаций, характерного для более сложных нелинейных моделей. Разрывным задается только один упругий модуль $\beta^{\pm}$, связанный с изменением сдвиговых деформаций. В рамках выбранной модели на примере решения простейших краевых задач указаны особенности распространения возмущений в несжимаемой упругой среде со сдвиговой разномодульностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быковцев Г. И., Лаврова Е. Б.* Модель анизотропно упрочняющейся среды, имеющей различные законы упрочнения при растяжении и сжатии // Известия АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 146-151.

2. *Мясников В. П., Топалэ В. И.* Моделирование сейсмической анизотропии в литосфере как разномодульном упругом теле // Известия АН СССР. Физика Земли. 1987. № 5.

3. *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.

4. *Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т.* О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Дальневосточный математический журнал. 2005. Т. 6, № 1-2. С. 94-105.

5. *Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е.* О возникновении плоских и сферических волн в упругой среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4(14). С. 147-155.

6. *Дудко О. В., Лаптева А. А.* К распространению возмущений по несжимаемой упругой среде с разномодульным сопротивлением сдвигу // Сибирский журнал индустриальной математики. Новосибирск: изд-во Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН. 2013. Том XVI, № 1(53). С. 21-28.