С.Ф. ЛУКОМСКИЙ

ФУНКЦИИ ХААРА КАК СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА НУЛЬМЕРНОЙ ГРУППЕ

Саратовский государственный университет,
Lukomskii@info.sgu.ru

Псевдодифференциальные операторы (ПДО) над полем p-адических чисел появились в работах В.С.Владимирова и достаточно полное их исследование приведено в [2] и [5]. В работе С.В.Козырева [3], были найдены собственные функции ПДО в виде функций Хаара. Мы рассмотрим эти вопросы на произвольной нульмерной группе.

Пусть $(G, \dot{+})$ – локально компактная абелева нульмерная группа, топология в которой задана основной цепочкой подгрупп

$$\ldots \subset G_1 \subset G_0 \subset G_{-1} \subset \ldots, \ \mu G_0 = 1$$

такой, что $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p_n$, причем p_n – простые числа. Элементы $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ зафиксируем и систему назовем *базисной* в G. Подгруппы $G_n^\perp = \{\chi \in X : \ (\chi, G_n) = 1\}$ называют аннуляторами подгруппы G_n. Для любого $n \in \mathbb{Z}$ выбираем характер $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$, фиксируем. Полученную систему $(r_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ называем системой Радемахера. Любой характер $\chi \in X$ однозначно представим в виде

$$\chi = \prod_{n=-\infty}^{N} r_n^{\alpha_n} \ \ (\alpha_n = \overline{0, p_n - 1}).$$

Всегда $(G_{n+1}^\perp/G_n^\perp)^\sharp = p_n$, где p_n – те же самые, что и раньше. Определяем числа $m_0 = 1$ и $m_{n+1} = m_n \cdot p_n$, т.е. если $n > 0$, то $m_n = p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$ и $m_{-n} = \frac{1}{p_{-1}p_{-2}\ldots p_{-n}}$.

Если операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию $p_n g_n = 0$, то группа называется группой Виленкина. Если $p_n = p$ и операция $\dot{+}$ удовлетворяет условию $pg_n = g_{n+1}$, то группа G совпадает с полем $\mathbb{Q}_p$ всех p-адических чисел. Подробно вопросы анализа на нульмерных группах изложены в [1].

Функции Хаара на G определяются равенством

$$H_0 \equiv 1, \ H_{jm_n+k}(x) = \sqrt{m_n} r_n^j(x \dot{-} q)\mathbf{1}_{G_n}(x \dot{-} q), \ j = 1, ..., p-1,$$

[0]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 13-01-00102-а

где k и q связаны соотношениями

$$q = g_{n-1}a_{n-1}\dot{+}g_{n-2}a_{n-2}\dot{+}\ldots\dot{+}g_0a_0$$

$$k = m_{n-1}a_{n-1} + m_{n-2}a_{n-2} + \ldots + m_0a_0.$$

На произвольной нульмерной группе функции Хаара были введены в работе [4]. Определим оператор D^α равенством

$$(D^\alpha f)(x) = (\rho(\chi)^\alpha \hat{f}(\chi))^\vee(x), \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{3.1}$$

где символ $\rho(\chi) = m_n$ при $\chi \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$.

Теорема 1. *Функции Хаара $H_{jm_n}(x)$ являются собственными функциями оператора $D^\alpha f$, соответствующими собственным значениям $\lambda_{jm_n} = m_n^\alpha$.*

Из этой теоремы сразу получаются следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть псевдодифференциальный оператор D определен равенством*

$$(Df)(x) = (\rho(\chi)\hat{f}(\chi))^\vee(x),$$

где $\rho(\chi) = \rho_n$ при $\chi \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$. Тогда функции Хаара $H_{jm_n+k}(x)$ есть собственные функции оператора Df, соответствующие собственным значениям $\lambda_{jm_n+k} = \rho_n$.

Теорема 3. *Функции Хаара $H_{jm_n+k}(x)$ являются собственными функциями оператора Df тогда и только тогда, когда $\rho(\chi) = \mathrm{const}$ при $\chi \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$.*

Литература

[1] Г.Н.Агаев, Н.Я.Виленкин, Г.М.Джафарли, А.И.Рубинштейн, Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Элм, Баку, 1981.

[2] B.C.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов, *p-адический анализ и математическая физика.* Наука, Москва, 1994.

[3] С.В.Козырев, Теория всплесков как p-адический спектральный анализ, Изв.РАН, серия матем, 66:2, 149-159, 2002.

[4] С.Ф.Лукомский, О рядах Хаара на компактной нуль-мерной группе, Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 9:1, 14-19, 2009.

[5] В.М.Шелкович, А.Ю.Хренников, *Современный p-адический анализ и математическая физика. Теория и приложения.* Физматлит, М, 2012.