ЭНЕРГИЯ РАССЕЯНИЯ РАБОТЫ ВНУТРЕННИХ СИЛ НА ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ В РЕШЕНИИ ШИЛДА О РАСТЯЖЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

О. В.Козлова, Е. С.Каминская

ФГБОУ ВПО «Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет», kozlovaolga@list.ru

Разрушение материалов является необратимым процессом и поэтому тесно связано с необратимыми термодинамическими процессами описываемыми теорией пластического течения. Эти процессы связаны с траекторией движения частиц материала и мало исследованы. В работе рассматриваются необратимые процессы рассеяния работы внутренних сил на пластических деформациях в известной задаче Шилда [1], аналогичные задачи рассматривались в работах [2, 3].

В работе Р. Т. Шилда было рассмотрено одноосное сжатие круглого цилиндра из жесткопластического материала.

Пусть область пластического течения охватывает материал ниже β – линии OB, проходящей через начало координат (рис. 1).

Краевое условие при $z=0$: $V_z=1$, а условие равенства нулю скорости выше линии OB требует, чтобы $V_r=V_z$ на OB. Так как OB есть β – линия то, учитывая [4]

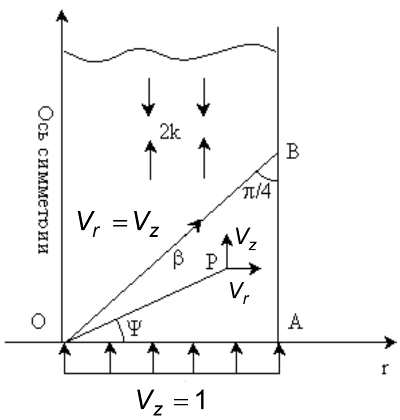

Рис. 1

$$dV_\alpha - V_\beta d\overline{\varphi} = -\frac{1}{2r}(V_\alpha dr - V_\beta dz),$$

$$dV_\beta + V_\alpha d\overline{\varphi} = -\frac{1}{2r}(V_\alpha dz + V_\beta dr),$$

получаем

$$dV_r + dV_z = -V_r\frac{dr}{r} \quad \text{на } OB,$$

а из условия $V_r=V_z$ на OB следует, что

$$V_r = V_z = \frac{C}{\sqrt{r}} \text{ на ОВ},$$

где C – пока произвольная положительная постоянная.

Значения C, отличные от нуля, соответствуют значениям V_z, равным бесконечности в начале координат O, если двигаться к этой точке в направлении OB. Поэтому постоянную C нужно принять равной нулю. Далее, $V_r=V_z=0$ на OB, а V_r и V_z непрерывны при переходе через OB.

Уравнение несжимаемости и уравнение изотропии не содержат характерного размера, и, учитывая граничные условия на OA и OB, заключаем, что скорость в точке P зависит только от угла между OP и осью r. Обозначив этот угол через ψ, имеем

$$V_r = f(\psi), \quad V_z = g(\psi).$$

Подстановка в систему равнений [5]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_r}{\partial r} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z} + \dfrac{V_r}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial V_r}{\partial z} + \dfrac{\partial V_z}{\partial r} = 0. \end{cases}$$

показывает, что функции f и g удовлетворяют уравнениям

$$-f'\sin\psi + f\sec\psi + g'\cos\psi = 0,$$

$$f'\cos\psi - g'\sin\psi = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по ψ. Решение этих уравнений, удовлетворяющее граничным условиям $f = g = 0$ при $\psi = \pi/4$ и $g = 1$ при $\psi = 0$, будет

$$V_r = f(\psi) = \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\cos 2\psi}}{\cos\psi},$$

$$V_z = g(\psi) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\cos 2\psi}}{\sin\psi}\right),$$

где значения функции arctg лежат между 0 и $\frac{\pi}{2}$. При $\psi \to \frac{\pi}{4}$ значения f и g стремятся к функции $\frac{4\sqrt{\pi/4-\psi}}{\pi}$. При переходе через *OB* скорость непрерывна, а при подходе к *OB* снизу скорость деформации сдвига стремиться к бесконечности.

Перемена знаков составляющих описываемого поля скорости дает поля скорости, относящиеся к течению растянутого цилиндра. Следовательно, согласно решению Шилда, для растянутого цилиндра поле скоростей перемещений имеет вид:

$$V_r = -\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\cos 2\psi}}{\cos\psi},$$

$$V_z = -\frac{2}{\pi}arctg\left(\frac{\sqrt{\cos 2\psi}}{\sin\psi}\right). \tag{1}$$

Мощность удельной диссипации энергии для решения (1):

$$W' = \varepsilon_{ij}\sigma_{ij} = \frac{\partial V_z}{\partial z}2k,$$

$$W' = \frac{4k}{\pi}\frac{z\sin 2\psi + r\cos 2\psi}{\sqrt{\frac{r^2+z^2}{r^2}\cos 2\psi\left(z^2 + r^2\cos 2\psi + z^2\cos 2\psi\right)}},$$

так как угол $\psi = \operatorname{arctg}\frac{z}{r}$, то на оси r: $z = 0$, угол $\psi = 0$.

Следовательно

$$W' = \frac{4k}{\pi r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шилд Р.Т.* О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии // Механика: сб. переводов, 1957, №2, с.102-122.

2. *Хромов А.И., Буханько А.А.* Пластическое течение в вершине трещине, деформации и энергетический критерий разрушения // Доклады Академий наук. – 2012. – Т. 442, №3. – С. 333-336.

3. *Хромов А.И., Буханько А.А.* Пластическое течение в окрестности вершины трещины, энергетический критерий разрушения и его связь с J-интегралом // Прикладная механика и техническая физика, 2012. – Т.53, №6. – С.112-120.

4. *Друянов Б.А., Непершин Р.И.* Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение, 1990.-272 с.

5. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, Гл.ред.физ.-мат.лит. 1969, 420с.