# ДЕФОРМИРОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО КЛИНА В ПРОЦЕССЕ НАРАЩИВАНИЯ И НАНОТЕХНОЛОГИИ

А. С. Луканов

*Самарский государственный университет,*
*las@samsu.ru*

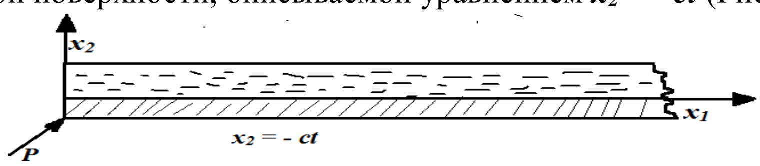
Основные результаты данной работы были получены Геннадием Ивановичем Быковцевым и автором более 20 лет назад [1, 4]. Тем интереснее, что поставленная тогда задача является актуальной и сегодня, хотя термин «нанотехнологии» ещё не использовался. Известно, что многие современные технологии основаны на изготовлении наноматериалов путём наращивания (напыления) плёнок. Однако после напыления часто наблюдается скручивание материала или коробление. Решение задачи о деформировании бесконечного клина в процессе наращивания является одной из первых попыток дать аналитическое решение упрощенной модели процесса наращивания.

Основная качественная особенность постановки краевых задач наращивания заключается в наличии части внешней поверхности, на которой осуществляется наращивание, т. е. присоединение новых частиц материала. При этом, условия на наращиваемой поверхности отличаются от краевых условий на неподвижной граничной поверхности, что впервые отмечено в [2]. На границе растущего тела должны быть заданы все компоненты тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{\mathbf{0}}$ [1—7], на которые наложены три дополнительных условия $\boldsymbol{\sigma}_{ij}\mathbf{n}_{ij} = \mathbf{p}_{ij}$ отражающие наличие заданного силового воздействия на наращиваемой поверхности.

Один из способов построения краевой задачи с изменяющейся границей и векторным условием на ней состоит в переходе в уравнениях МСС и в граничных условиях к скоростям (частным производным по времени) $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}$, $\dot{\mathbf{e}}_{ij}$, $\dot{\mathbf{u}}_i$ [2, 4—6].

Рассмотрим задачу о бесконечном клине, одна из граней которого наращивается (напыляется) с постоянной скоростью. Предполагается, что процесс наращивания изотропный, а наращиваемая поверхность свободна от механических нагрузок.

Как показано в [4] на этой поверхности, описываемой уравнением $\boldsymbol{x_2 = - ct}$ (Рис.), имеет




место краевое условие

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{\mathbf{0}} = (\delta_{ij} - n_i n_j)\, \boldsymbol{f} \qquad (1.1)$$

где $\boldsymbol{f}$ - постоянная величина, определяющая физический (технологический) процесс наращивания.

Для простоты положим, что наращиваемый слой $x_1 > 0,\ - ct \le x_2 < 0$ является упругим и его свойства совпадают с упругими свойствами клина. Тогда скорости напряжений деформаций и перемещений должны удовлетворять уравнениям теории упругости в приращениях

$$\partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{11}/\partial x_1 + \partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{12}/\partial x_2 = 0, \quad \partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{12}/\partial x_1 + \partial\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{22}/\partial x_2 = 0,$$
$$\dot{\boldsymbol{e}}_{11} = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{11} - \boldsymbol{\nu}\, \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{22})/E, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_{22} = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{22} - \boldsymbol{\nu}\, \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{11})/E, \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_{12} = (1+\boldsymbol{\nu})\, \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{12}/E, \qquad (1.2)$$
$$\dot{\boldsymbol{e}}_{11} = \partial\dot{\mathbf{u}}_1/\partial x_1, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_{22} = \partial\dot{\mathbf{u}}_2/\partial x_2, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_{12} = 1/2(\partial\dot{\mathbf{u}}_1/\partial x_2 + \partial\dot{\mathbf{u}}_2/\partial x_1).$$

Как показано в [2, 4], на наращиваемой поверхности для $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}$ должны выполняться краевые условия

$$\sigma_{ij,j}(x_i, \tau^*)c - \dot{\sigma}_{ij}(x_i, \tau^*)n_j = 0 \qquad (1.3)$$

где $t = \tau^*(x_i)$ - уравнение наращиваемой поверхности.

Пусть слой наращивается на бесконечный прямоугольный клин, который в момент времени t=0 занимает область $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Процесс наращивания идет с постоянной скоростью $c$, так что уравнение наращиваемой поверхности имеет вид: $x_1 > 0$, $x_2 = -ct$. Боковая грань клина $x_1 > 0$, $x_2 > -ct$ свободна от напряжений. Тогда для уравнений (1.2) имеем краевые условия

$$\dot{\sigma}_{11} = 0, \quad \dot{\sigma}_{12} = 0 \qquad (x_1 = 0, x_2 > -ct) \qquad (1.4)$$

Из соотношений (1.1) и (1.3) получаем

$$\dot{\sigma}_{12} = 0, \quad \dot{\sigma}_{22} = 0 \qquad (x_1 > 0, x_2 = -ct) \qquad (1.5)$$

Точка ($x_1 = 0$, $x_2 = -ct$) особая, и при $r = [x_1^2 + (x_2 - ct)^2]^{1/2} \to 0$ скорости напряжений неограниченно возрастают. Анализ упругих решений с различными особенностями порядка $r^\alpha$ исследовались в [8]. Анализ этих решений показал, что краевые условия для напряжений при $x_1 = 0$ могут выполняться только при $\alpha = 1$.

Введем подвижную систему координат $x = x_1$, $y = x_2 + ct$ тогда, краевая задача (1.2) - (1.5) сводится для определения $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{u}_i$ к решению уравнений теории упругости в приращениях для прямоугольного клина $x>0$, $y > 0$, нагруженного в вершине «сосредоточенной силой», имеющей проекции на оси координат $P_1$ и $P_2$. Это решение в приращениях имеет вид [9]:

$$\dot{\sigma}_{11}(x,y) = (x^2+y^2)^{-2}(P_1x^3+P_2x^2y), \qquad \dot{\sigma}_{22}(x,y) = (x^2+y^2)^{-2}(P_1xy^2+P_2y^3),$$
$$\dot{\sigma}_{12}(x,y) = (x^2+y^2)^{-2}(P_1x^2y+P_2xy^2) \qquad (1.6)$$

Напряжения в наращиваемом слое получаем интегрированием соотношений (1.6) по времени с момента зарождения $t = x_2/c$.

Найденное решение при $x_1 = \to 0$ имеет особенность порядка $\sigma_{22} \sim 16f(4 - \pi^2)^{-1} \ln x_1$. Остальные напряжения особенностей не имеют. Эта особенность может привести к отрыву наращиваемого слоя от подложки или короблению напыляемой плёнки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быковцев Г. И., Луканов А. С.* Деформирование клина в процессе наращивания //Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. с. 182-184.

2. *Арутюнян Н. Х., Метлов В. В.* Нелинейные задачи теории ползучести наращиваемых тел, подверженных старению // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. с. 142-152.

3. *Арутюнян Н. Х. Наумов В. Э.* Краевая задача теории вязкоупруго-пластичности для растущего тела, подверженного старению // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 1. с. 17-28.

4. *Быковцев Г. И., Луканов А. С.* Некоторые вопросы теории затвердевающих и наращиваемых вязкоупругих сред //Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. с. 116-118.

5. *Харлаб В. Д.* Линейная теория ползучести наращиваемого тела //Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та. 1966. Вып. 49. с. 93-119.

6. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.

7. *Тринчер В. К.* О постановке задачи определения напряженно-деформированного состояния растущего тела //Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 2. с. 119-124.

8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 401 с.

9. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.