ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. Н. Лепилов

ФГУП ГНП РКЦ «ЦСКБ-Прогресс»,
Lepilov_aleksand@mail.ru

Для функции $f: D \to R$, $D = R \times R^m$, $(t, y) \to f(t, y)$, $y \in R^m$, T-периодической по любой переменной, $f \in C^4(D, R)$, рассматривается предел максимального среднего

$$M_f = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{\gamma\in\Gamma(t_0,y_0)} \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} f(t,\gamma(t))dt,$$

где $\Gamma(t_0, y_0)$ – множество всех решений в смысле Каратеодори следующей задачи Коши для дифференциального включения:

$$\dot{\gamma} \in G, \qquad \gamma(t_0) = y_0,$$

$G = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ – параллелепипед, $0 < a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Известно, что задача вычисления предела максимального среднего M_f с заданной точностью может быть заменена задачей вычисления следующего максимального среднего [1]:

$$M_f^\Delta = \sup_{y_0\in K} \sup_{\gamma\in\Gamma(0,y_0)} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(t,\gamma(t))dt, \tag{1}$$

где $K = [y_{01}, y_{01} + T] \times \ldots \times [y_{0m}, y_{0m} + T] \subset R^m$ – параллелепипед.

В данной работе рассмотрен численный метод приближенного вычисления максимального среднего M_f^Δ [2] и оценена погрешность этого вычисления.

Оптимальное решение задачи (1) находится по принципу максимума Понтрягина для задачи со свободным концом [3], решая следующую задачу Коши на отрезке $[0, \Delta]$:

$$\begin{aligned} &\dot{p}_j = -\frac{\partial}{\partial\gamma_j} f(t,\gamma), && p_j(\Delta) = 0, \\ &\dot{\gamma}_j = \begin{cases} a_j, & при \quad p_j < 0, \\ b_j, & при \quad p_j > 0, \end{cases} && \gamma_j(\Delta) = y_{j\Delta}, \end{aligned} \tag{2}$$

$j = 1,\ldots,m$.

Для численного решения задач (1), (2) вводится на отрезке $[0, \Delta]$ равномерная сетка Λ_τ с шагом τ. Начальное условие y_Δ в (2) в силу T-периодичности функции f берется из параллелепипеда K, на котором также вводится равномерная сетка $\Omega_h \subset K$ с шагом $h > 0$ по каждой координате.

Приближенное решение задачи (1) ищется перебором. Из всех получающихся средних, отвечающих начальным значениям y_Δ из Ω_h, выбирается максимальное. Оно принимается за приближенное значение максимального среднего, обозначаемое S_f^Δ.

Для некоторого $\delta > 0$ и $\forall\, \gamma(t)$ из сужения $\Gamma(0,y_0)$ на отрезок $[0,\Delta]$ определяется множество $A_\delta = \{t$ из $[0,\Delta]$: существует j, $j = 1,\ldots,m$, такое, что $|p_j(t)| < \delta\}$. На функцию f накладывается условие.

Условие 1. Существует целое N, $\forall\, \kappa > 0$ $\exists\, \delta_0 > 0$ такое, что $\forall\, \delta \in [0,\delta_0]$ и $\forall\, \gamma(t)$ из сужения $\Gamma(0,y_0)$ на отрезок $[0,\Delta]$ $\exists$ конечная система интервалов (c_i,d_i), $i = 1,\ldots,N_1$, $N_1 \le N$, $\sum_{i=1}^{N_1}(d_i - c_i) \le \kappa$, покрывающая множество A_δ.

Теорема об оценке погрешности приближенного вычисления предела максимального среднего M_f.

Теорема 1 [2]. Пусть для функции f выполнены указанные выше условия. Тогда имеет место следующая оценка:

$$\left|M_f - S_f^\Delta\right| \le \varepsilon_1(n) + \varepsilon_2(\tau) + \varepsilon_3(\kappa,h),$$

где $\varepsilon_1(n) = 2\tau_0 C_f/\Delta$ – теоретическая погрешность [1]; $\varepsilon_2(\tau)$ – погрешность интегрирования, зависит от выбранного метода интегрирования; $\varepsilon_3(\kappa,h) = L(hm^{1/2}+U\kappa)$ – погрешность, обусловленная введением сеток, $U = \left(\sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i)^2\right)^{1/2}$, $L = \max_{1\le i\le m}\max_{\gamma_i\in[0,T]}\left|f'_{\gamma_i}(t,\gamma)\right|$.

Далее пусть указанным методом найдено численное решение $\gamma^s(t)$, при котором достигается S_f^Δ, а значит найдено и соответствующее численное решение задачи (2) $p^s(t,\gamma^s(t))$. Для того чтобы воспользоваться оценками теоремы 1 необходимо определить δ из условия 1 и, зная его, найти систему промежутков (c_i,d_i), на которых $|p^s{}_j(t,\gamma^s(t))| < \delta$, $j = 1,\ldots,m$. В качестве δ берется погрешность метода определения управления переменной $\gamma(t)$ с помощью задачи (2). Предложена схема нахождения интервалов (c_i,d_i). Схема излагается в предположении, что выполняется условие трансверсальности при пересечении любой $p^s{}_j(t,\gamma^s(t))$ оси времени (в координатной плоскости p_j0t), $j = 1,\ldots,m$.

В среде Delphi разработана программа, реализующая предложенный метод приближенного вычисления предела максимального среднего M_f.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филатов О.П.* Вычисление пределов максимальных средних для периодических функций // Вестник СамГУ. 2011. No 2. С. 75-79.

2. *Лепилов А.Н.* Численный метод вычисления пределов максимальных средних для периодических функций // Вестник СамГУ. 2011. No 8. С. 45-49.

3. *Алексеев В. М, Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 408 с.