

УДК 539.385

Т.Д.Коваленко

ВЫБОР СОГЛАСУЮЩИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ПРИ АПРОКСИМАЦИИ ИСХОДНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ПРОЧНОСТИ МИКРООБЪЕМОВ МАТЕРИАЛА

Проведено численное исследование взаимосвязи выбора согласующих вероятностей и получаемых оценок искомых параметров распределения прочности микрообъемов материала.

Для статистического прогнозирования вероятности P появления первых макротрещин используется выражение, полученное на основе обобщения теории "слабого" звена /1/:

$$-\ln(1-P) = \frac{1}{\sigma_0^m} \int_{V(\sigma > u)} (\sigma^{\text{экв}}(x, y, z) - u)^m dV. \quad (1)$$

Здесь $\sigma^{\text{экв}}(x, y, z)$ - распределение напряжений для некоторого образца (детали), в каждой точке которого внутренние силы упругости характеризуются эквивалентным напряжением по одной из теорий прочности. Распределение напряжений по объему можно представить в виде функции координат и уровня максимальных напряжений $\sigma^{\text{экв}}(x, y, z) = \sigma(x, y, z, \sigma_{\text{max}})$. Интегрирование ведется в области, где $\sigma^{\text{экв}} > u$; u, m, σ_0 - параметры распределения прочности микрообъемов для фиксированной долговечности, принимаемого в соответствии с законом Вейбулла.

При интегрировании соотношения (1) необходимо иметь численные оценки параметров u, m, σ_0 для заданной базы испытаний. Эти оценки можно получить по результатам усталостных испытаний лабораторных образцов из данного материала.

Представим результаты испытаний лабораторных образцов графически в виде квантильных кривых усталости, как это показано на рис.1. Кроме квантильных кривых усталости для P_1, P_2, P_3 здесь представлена зависимость между средними значениями логарифмов долговечности и средними значениями напряжений $\lg N(\bar{\sigma}_{\text{max}})$. График этой зависимости проходит через точки, лежащие на пересече-

Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Кузбашев, 1990

уровней напряжений $\bar{\sigma}_{\max i}$ и соответствующих базовых долговечностей $\lg N_{\delta_i}$.

В соответствии с большим количеством литературных данных для описания семейства квантильных кривых используется нормальное распределение логарифма долговечности в виде

$$\lg N = \overline{\lg N}(\bar{\sigma}_{\max}) + u_p s(\lg N(\bar{\sigma}_{\max})), \quad (2)$$

u_p - квантиль нормального закона распределения для вероятности P ; $\overline{\lg N}$ - среднее значение логарифма долговечности; $s(\lg N(\bar{\sigma}_{\max}))$ - среднеквадратическое отклонение логарифма долговечности в зависимости от среднего напряжения.

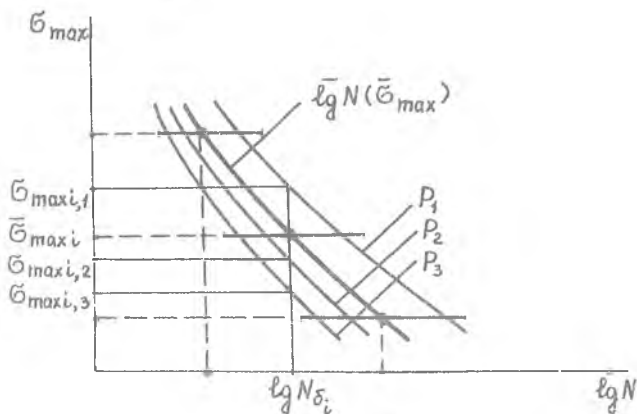


Рис. I

В сечении квантильных кривых усталости для данной базы испытаний N_{δ_i} имеем напряжения $\sigma_{\max i,1}$, $\sigma_{\max i,2}$, $\sigma_{\max i,3}$, которые соответствуют вероятностям разрушения P_1 , P_2 , P_3 . Подставляя численные значения напряжений в выражение (I), запишем систему уравнений для оценки параметров u , m , σ_0 в виде

$$J_j \sigma_0^m = s(u, m, \sigma_{\max i, j}); \quad j = 1, 2, 3,$$

$$J_j = -\ln(1 - P_j),$$

$$s(u, m, \sigma_{\max i, j}) = \int_V (\sigma^{\text{ЭКВ}}(x, y, z, \sigma_{\max i, j}) - u)^m dV, \quad (3)$$

$N_{\delta_i} = const$, $i = 1, 2, \dots, n$, n - число уровней нагружения.

Если закон распределения напряжений для данной базы испытаний, получаемый расчетным путем из выражения (1), можно привести в полное соответствие с экспериментальным распределением напряжений за счет подбора значений параметров μ , m , σ_0 , то вероятности P_1 , P_2 , P_3 могут быть выбраны произвольно, но так, чтобы они были различными.

Очевидно, что такого соответствия законов распределения в рассматриваемой постановке быть не может, т.к. один из них получается перестроением нормального распределения логарифма долговечности, а другой соответствует интегральному преобразованию распределения Вейбулла. Эти законы существенно различаются при малых вероятностях. Закон Вейбулла имеет выраженную нижнюю границу рассеивания, задаваемую параметром μ . Нормальный закон такого свойства не имеет.

Поэтому встает вопрос о необходимости выбора значений вероятностей P_1 , P_2 , P_3 таким образом, чтобы добиться наилучшего соответствия исходного экспериментального распределения и того, которое описывается соотношением (1) с использованием оценок параметров, получаемых из решения системы (3).

Допустим, что значение вероятностей P_1 , P_2 , P_3 заданы и что система (3) решена относительно оценок параметров μ^* , m^* , σ_0^* для базы испытаний N_{δ_i} .

Оценим математическое ожидание и дисперсию напряжений для теоретического распределения, задаваемого соотношением (1):

$$M_{расч} = \sum_j \sigma_{max i, j} P_j ,$$

$$D_{расч} = \sum_j \sigma_{max i, j}^2 P_j - M_{расч}^2 . \quad (5)$$

Приведенные соотношения могут быть реализованы только численно, причем вероятность P_j связана с вероятностью P из выражения (1), но не равна ей и имеет другой смысл, характеризуя появление случайной величины $\sigma_{max i}$ в заданном интервале, в то время как P представляет собой вероятность превышения заданного уровня.

Рассматривая выражения вида (2) относительно $\sigma_{max i, j}$, можно аналогично (4) и (5) оценить математическое ожидание $M_{эксп}$ и дисперсию $D_{эксп}$ экспериментального распределения напряжений.

Сравнивая расчетные и экспериментальные статистические характеристики, составим критериальные функции для выбора значений вероятностей P_1 , P_2 в виде

$$F_1(P_1, P_2) = \frac{M_{\text{расч}} - M_{\text{эксп}}}{M_{\text{эксп}}}, \quad (6)$$

$$F_2(P_1, P_2) = \frac{D_{\text{расч}} - D_{\text{эксп}}}{D_{\text{эксп}}}. \quad (7)$$

Решая систему уравнений

$$F_i(P_1, P_2) = 0; \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

можно определить P_1 и P_2 при заданном P_3 .

Если параметры u , m , σ_0 найдены, то расчетное распределение напряжений, построенное по уравнению (1), и экспериментальное распределение, полученное на основе выражения (2), будут пересекаться в трех точках. Они соответствуют вероятностям P_1 , P_2 , P_3 , как показано на рис. 2.

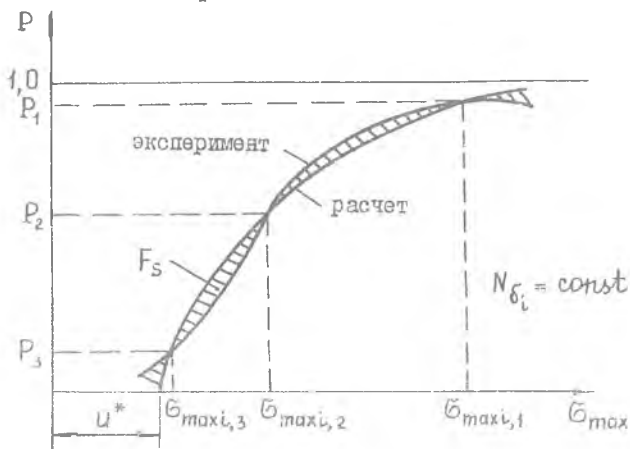


Рис. 2

В силу нелинейности системы уравнений (8) и (3) имеет место неоднозначность их решений относительно оценок параметров u , m . Поэтому остается вопрос о выборе наиболее подходящего решения.

Критерием для этого выбора предлагается минимизация площади между кривыми для экспериментальной и теоретической функций распределения (рис.2). Чтобы введенный критерий явился также мерой относительной погрешности согласования двух функций распределения, соответствующая площадь относится к площади под кривой для экспериментального распределения:

$$F_3 = \frac{\int_0^1 |G_{\max i, p}^{\text{экс}} - G_{\max i, p}^{\text{расч}}| dP}{\int_0^1 G_{\max i, p}^{\text{экс}} dP}, \quad F_3 = \min. \quad (9)$$

На основе описанной методики разработан алгоритм и составлена программа для определения значений согласующих вероятностей при аппроксимации исходного распределения прочности микрообъемов материала. Результаты работы программы иллюстрируются в таблице I на примере расчета характеристик сопротивления усталости круглого гладкого образца из материала ЗОХГСА при чистом изгибе (диаметр образцов - 10 мм, длина рабочей части - 20 мм) для трех значений базовой долговечности $\lg N$.

Таблица I

Оценки параметров материала ЗОХГСА

Базовая долговечность $\lg N$	Вероятности P_1, P_2 при $P_3 = 0,001$	$F_3 \min$	Параметры u (МПа), G_0 (МПа), m
4,170	0,8026 0,2105	0,0016	774,16 256,50 3,21
5,437	0,7999 0,2583	0,0023	531,20 189,72 3,01
6,094	0,8445 0,1738	0,0015	437,39 158,15 3,93

Таблица 2

Сравнение расчетных и экспериментальных данных

$\lg N$	Средние напряжения (МПа)		Дисперсия напряжений (МПа)	
	эксперимент	расчет	эксперимент	расчет
4,170	880,9	880,9	730,3	730,3
5,437	604,4	604,2	371,8	371,8
6,094	512,9	513,0	261,9	261,9

Эффективность программы показана в таблице 2 на примере сравнения статистических характеристик, полученных численным образом, и соответствующих экспериментальных данных.

Полученные результаты подтверждают эффективность предложенной методики. Проведенные разработки позволяют увеличить точность и достоверность оценки параметров, необходимых для прогнозирования сопротивления усталости в статистическом аспекте.

Библиографический список

1. Дуплякин В.М., Миноранский Р.Э., Коваленко Т.Д. Статистическое прогнозирование появления усталостных макротрещин на основе приложений теории "слабого" звена / Куйбышевск. авиац. ин-т. Куйбышев, 1989. 78 с. Деп. в ВНИИТИ 15.05.89, № 3191-В89.

УДК 539.43

А.С.Мостовой, А.В.Кириллов, А.Г.Прохоров

ПРИМЕНЕНИЕ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

Предлагается метод расчета долговечности элементов конструкций, основанный на численной реализации линейно-дискретной гипотезы накопления повреждений. При этом напряженное состояние сечения с усталостной трещиной исследуется с использованием аппарата линейной механики разрушения. Теоретические результаты сопоставлены с экспериментальными данными.

Для оценки долговечности элементов конструкций эффективным оказалось применение метода расчета, изложенного в работе /1/. Метод основан на использовании линейно-дискретных представлений о механизме усталостного разрушения в комбинации с оценкой напряженного состояния деталей с усталостными трещинами при помощи аппарата линейной механики разрушения.

вопросы прочности и долговечности элементов
авиационных конструкций. Куйбышев, 1990
