

оживал иллюстрировано на рис.9, где дается сопоставление оболочек по массе при равной несущей способности (Γ_1). Эффективность оживала уменьшается при учете коэффициента устойчивости (---) $\sqrt{4/3}$:

$$K_{\text{у}}^{\text{кон}} = \left(100 \frac{h}{R_{\text{ср}}}\right)^{0,375}.$$

В результате исследования построены расчетные зависимости для проектирования оживальных оболочек, работающих на внешнее давление. Такими оболочками в ряде случаев целесообразно заменять конические фрагменты тонкостенных конструкций с целью достижения эксплуатационных преимуществ.

Л и т е р а т у р а

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. - М.: Машиностроение, 1978. - 312 с.
2. Бакирова А.З., Суркин Р.Г. Об устойчивости эллипсоидальных и сфероидальных оболочек вращения при внешнем равномерно распределенном давлении. Обзор. В кн.: Труды семинара. Прочность и устойчивость оболочек. Казань: Казанский физико-техн. ин-т, 1977, вып. 9, с. 5.
3. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. - М.: Машиностроение, 1975. - 376 с.
4. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. - М.: Машиностроение, 1985. - 344 с.

УДК 629.7.02:534.1

С.В.Махнович, А.А.Печенин

УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Для исследования устойчивости ортотропной оболочки под действием давления, неравномерно распределенного по части ее боковой поверхности (рис.1), используем уравнения нейтрального равновесия $/I/$ в виде:

$$\frac{C_{11}}{\Omega_0} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} + \left(\frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega_0}\right) \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{C_{22}}{\Omega_0} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + R \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + L(w_0, w) = 0;$$

$$\frac{1}{R^2} \left[D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right) w \right] -$$

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{1}{R^2} L(w_0, F) - Q = 0. \quad (1)$$

Здесь $\Omega_0 = C_{11} C_{22} - C_{12}^2$; $C_{k,e}$ и $D_{k,e}$ - жесткости оболочки; $Q = N_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + N_{22}^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) + 2N_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \theta}$, остальные обозначения приняты такими же, как в работе [2].

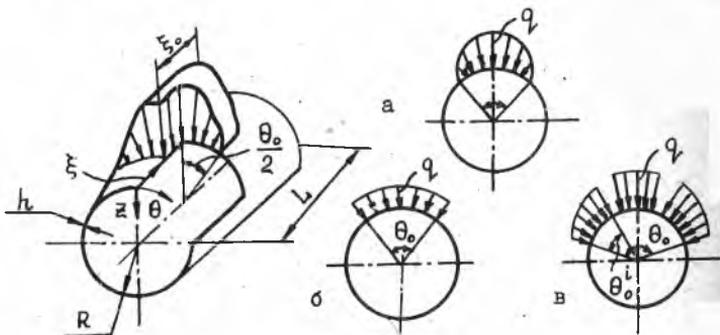


Рис. I

Докритическое состояние оболочки определим из уравнений равновесия линейной теории:

$$L_{11} u_0 + L_{12} v_0 + L_{13} w_0 = 0$$

$$L_{21} u_0 + L_{22} v_0 + L_{23} w_0 = 0$$

$$L_{31} u_0 + L_{32} v_0 + L_{33} w_0 = Z R^2, \quad (2)$$

где

$$L_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad L_{12} = (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta};$$

$$L_{13} = -C_{12} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{R^2} (D_{11} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - D_{66} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \theta^2});$$

$$L_{21} = L_{12}; \quad L_{22} = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2};$$

$$L_{23} = -C_{22} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2} (D_{12} + 3D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta};$$

$$L_{31} = L_{13}; \quad L_{32} = L_{23}; \quad L_{33} = C_{22} + \frac{1}{R^2} [D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} +$$

$$+ 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right)].$$

$\chi(\xi, \theta)$ - функция, описывающая распределение внешнего давления по поверхности оболочки.

Докритические усилия N_{11}^0 , N_{22}^0 и N_{12}^0 определяются через перемещения оболочки u_0 , v_0 и w_0 из соотношений упругости:

$$N_{11}^0 = \frac{1}{R} \left[C_{11} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + C_{12} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \nu_0 \right) + \frac{D_{11}}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right]$$

$$N_{22}^0 = \frac{1}{R} \left[C_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} - w_0 \right) + C_{12} \frac{\partial u_0}{\partial \xi} - \frac{D_{22}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + w_0 \right) \right] \quad (3)$$

$$N_{12}^0 = \frac{1}{R} \left[C_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right) + 2 \frac{D_{66}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right) \right].$$

Разложим функцию нагрузки $\chi(\xi, \theta)$ в ряд Фурье

$$\chi(\xi, \theta) = q \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{mn} \sin(\bar{m} \xi) \cos(n \theta), \quad (4)$$

где q - характерный параметр нагрузки.

Для шарнирно опертой оболочки решение уравнений (1) и (2) представим также в виде рядов:

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} w_{ij} \sin(\tau \xi) \cos(j \theta) \quad (5)$$

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} F_{ij} \sin(\tau \xi) \cos(j \theta); \quad \tau = \frac{i \pi R}{L}$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} \sin(\bar{m} \xi) \cos(n \theta)$$

$$u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} \sin(\bar{m} \xi) \cos(n \theta) \quad (6)$$

$$v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin(\bar{m} \xi) \cos(n \theta); \quad \bar{m} = \frac{m \pi R}{L}.$$

Здесь $m = 1, 2, 3, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$ - волновые числа

докритического состояния оболочки, а $i, j = 1, 2, 3, \dots$ - бифуркационные волновые числа.

Подставляя (4), (5) и (6) в уравнения (1) и (2) и интегрируя их по методу Буонова-Галеркина, после исключения всех неизвестных, кроме $w_{i,j}$, получим систему алгебраических уравнений:

$$A_{k,p} w_{k,p} + \sum_{i=1}^{\infty} w_{i,p} [\bar{Q} \beta_{i,p}^0 + \bar{Q}^2 (\gamma_{i,p}^0 + \gamma_{i,p})] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [w_{i,p+n} (\bar{Q} \beta_{i,p+n} + \bar{Q}^2 \gamma_{i,p+n}) + w_{i,p-n} (\bar{Q} \beta_{i,p-n} + \\
 & - \bar{Q}^2 \gamma_{i,p-n}) + w_{i,p+2n} \bar{Q}^2 \gamma_{i,p+2n} + w_{i,p-2n} \bar{Q}^2 \gamma_{i,p-2n}] = 0, \\
 & \quad (k, p = 1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

Коэффициенты уравнений системы (7) имеют вид:

$$A_{k,p} = S_4(\bar{k}, p) + \frac{\bar{k}^4}{S(\bar{k}, p)}; \quad \bar{k} = \frac{k\pi R}{L}; \quad \bar{Q} = \frac{qR}{\pi C_{11}}$$

$$\beta_{i,p} = b_1 p^2 \sum_{m=1}^{\infty} f_{m0} z_{m0} \bar{m}^2 d_1 \varphi_0$$

$$\beta_{i,p \pm n} = b_2 \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn} z_{mn} \Phi(\pm n) \varphi_1(\pm n)$$

$$\gamma_{i,p}^0 = b_3 p^2 \sum_{m=1}^{\infty} f_{m0} z_{m0} \bar{m}^2 d_1 (2\varphi_0 + \varphi_{p+n} + \varphi_{p-n}) \quad (8)$$

$$\gamma_{i,p} = b_4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} z_{mn} [\Phi(-n) \varphi_{p+n} + \Phi(+n) \varphi_{p-n}]$$

$$\gamma_{i,p \pm n} = b_5 \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn} z_{mn} \Phi(\pm n) \varphi_0$$

$$\gamma_{i,p \pm 2n} = b_6 \sum_{m=1}^{\infty} f_{mn} z_{mn} \Phi(\pm 2n) \varphi_{p \pm n}$$

Здесь $b_1 = 0,5$; $b_2 = 0,25$; $b_3 = b_5 = 0,125$; $b_4 = b_6 = 0,0625$;

$$\varphi_0 = \frac{\bar{k}^2}{S(\bar{k}, p)} - \frac{1}{p^2 \bar{m}^2 \Delta_{33}^0} [p^2 S_2(\bar{m}, 0) + \tau^2 S_1(\bar{m}, 0)] + \frac{\tau^2}{S(\tau, p)};$$

$$\varphi_1 = \frac{\bar{k}^2}{S(\bar{k}, p)} - \frac{\varphi_2(\pm n)}{\Phi(\pm n) \Delta_{33}} + \frac{\tau^2}{S(\tau, p \pm n)};$$

$$\varphi_2 = [(p \pm n)^2 S_2(\bar{m}, n) + \tau^2 S_1(\bar{m}, n)] d_1 + 2\tau(p \pm n) S_3(\bar{m}, n) d_2;$$

$$\Phi(\pm x) = [(p \pm x) \bar{m}^2 + n^2 \tau^2] d_1 + 2\bar{m} n \tau (p \pm x) d_2 \quad x = 0, n, 2n;$$

$$\varphi = p^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{m}^2}{S(\tau, p)} f_{m0} z_{m0} d_1;$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(\pm n)}{S(\tau, p)} f_{mn} z_{mn};$$

$$f = \frac{\Delta_{33}^0}{\Delta^0}; \quad f_{mn} = \frac{\Delta_{33}}{\Delta};$$

$$d_1 = [(-1)^{k+m+i} - 1] [(\kappa - m - i)^{-1} + (\kappa + m + i)^{-1} - (\kappa + m - i)^{-1}];$$

$$d_2 = [(-1)^{k+m+i} - 1] [(k-m-i)^{-1} + (k+m+i)^{-1} + (k-m+i)^{-1} + (k+m-i)^{-1}]$$

$$S(x_1, x_2) = \frac{1}{\delta_1 - \delta_2^2} \left[x_1^4 + \left(\frac{\delta_1 - \delta_2^2}{\delta_3} - 2\delta_2 \right) x_1^2 x_2^2 + \delta_1 x_2^4 \right]$$

$$\text{при } (x_1, x_2) = (\bar{k}, \rho) \vee (\tau, \rho) \vee (\tau, \rho \pm n);$$

$$S_1(\bar{m}, n) = \delta_2 (\bar{m} \Delta_{32} - \Delta_{33}) - \bar{m} \Delta_{31} - \omega_1 \bar{m}^2 \Delta_{33}$$

$$S_2(\bar{m}, n) = \delta_1 (n \Delta_{32} - \Delta_{33}) - \delta_2 \bar{m} \Delta_{31} - \omega_2 (1 - n^2) \Delta_{33}$$

$$S_3(\bar{m}, n) = \delta_3 (\bar{m} \Delta_{32} - n \Delta_{31}) + \omega_4 (2\bar{m} n \Delta_{33} - n \Delta_{31} - \bar{m} \Delta_{32})$$

$$S_4(\bar{m}, n) = \omega_1 \bar{k}^4 + 2(\omega_3 + 2\omega_4) \bar{k}^2 \rho^2 + \omega_2 (\rho^4 - 2\rho^2 + 1),$$

где

$$\Delta_{31} = a_{13} a_{22} - a_{12} a_{23}; \quad \Delta_{32} = a_{13} a_{21} - a_{11} a_{23}$$

$$\Delta_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2; \quad \Delta = a_{13} \Delta_{31} + a_{23} \Delta_{32} + a_{33} \Delta_{33}$$

$$a_{11} = -(\bar{m}^2 + \delta_3 n^2); \quad a_{12} = (\delta_2 + \delta_3) m n; \quad a_{21} = -a_{12}$$

$$a_{13} = -\delta_2 \bar{m} - \bar{m} (\omega_1 \bar{m}^2 - \omega_4 n^2); \quad a_{22} = -(\delta_3 \bar{m}^2 + \delta_1 n^2)$$

$$a_{23} = n [\delta_1 + (\omega_3 + 3\omega_4) \bar{m}^2]; \quad a_{31} = -a_{13}; \quad a_{32} = -a_{23}$$

$$\delta_1 = \frac{C_{22}}{C_{11}}; \quad \delta_2 = \frac{C_{12}}{C_{11}}; \quad \delta_3 = \frac{C_{66}}{C_{11}}; \quad \omega_1 = \frac{D_{11}}{C_{11} R^2};$$

$$\omega_2 = \frac{D_{22}}{C_{11} R^2}; \quad \omega_3 = \frac{D_{12}}{C_{11} R^2}; \quad \omega_4 = \frac{D_{66}}{C_{11} R^2}$$

$$w_{mn} = \frac{q R^2}{C_{11}} \frac{\Delta_{33}}{\Delta} z_{mn}; \quad u_{mn} = \frac{q R^2}{C_{11}} \frac{\Delta_{31}}{\Delta} z_{mn}; \quad v_{mn} = \frac{q R^2}{C_{11}} \frac{\Delta_{32}}{\Delta} z_{mn}.$$

Моменту потери устойчивости начального докритического состояния оболочки соответствует минимальное значение параметра нагрузки \bar{Q} , при котором существует ненулевое решение ($w_{ij} \neq 0$) системы однородных алгебраических уравнений (7). Условием существования такого решения является равенство нулю главного определителя системы:

$$\det |\lambda^2 A^{(k,p)} + \lambda B^{(k,p)} + C^{(k,p)}| = 0. \quad (9)$$

Здесь $\lambda = \frac{1}{\bar{Q}}$; $A^{(k,p)} = \{A_{k,p}\}$ - диагональная матрица, $B^{(k,p)} = \{\beta_{i,j}\}$ и $C^{(k,p)} = \{\gamma_{i,j}\}$ - матрицы коэффициентов (8). Тогда

образом, задача сводится к определению наибольшего корня λ^* характеристического уравнения (9). Собственный вектор $\{w_{ij}\}$, соответствующий этому значению λ^* , определяет докритическую или бифуркационную форму срединной поверхности оболочки.

При численном решении уравнения (9) рассматривались матрицы конечного порядка, который увеличивался до тех пор, пока значение λ^* не стабилизировалось в пределах заданной точности. На каждом таком шаге λ^* и соответствующий ему собственный вектор $\{w_{ij}\}$ определялись методом степенных итераций.

При численном анализе докритического состояния и устойчивости оболочек в зависимости от их геометрических и жесткостных характеристик, а также от вида нагрузки обнаруживаются любопытные связи значений критических нагрузок с деформированием поперечного сечения оболочки в предкритической стадии.

На рис. 2 приведены графики изменения относительных величин критической нагрузки $\varphi = \frac{q^*}{q_0}$ и прогиба $\bar{w} = \frac{w E_1}{q_0 R}$ (в центре w_c и на краю w_k площадки нагружения) композитной оболочки при различных угловых размерах площадки нагружения θ_0 для двух видов распределения нагрузки: косинусоидального (рис. I а) и локально-равномерного (рис. I б). Здесь критическая локальная нагрузка q^* отнесена к критическому равномерному давлению q_0^* . Приведенные упругие характеристики материала оболочки $\nu_1 = 0,214$; $\nu_2 = 0,445$; $\delta_1 = \frac{E_2}{E_1} = 2,08$; $\delta_3 = \frac{G}{E_1} = 0,33$. Кривые $\varphi_{кА}$ на рис. 2 получены из расчета критических нагрузок в рамках классического подхода, когда докритическое состояние оболочки полагается безмоментным.

Сравнение параметров докритического прогиба \bar{w} и критической нагрузки φ показывает, что колебательный характер зависимости φ от угла θ_0 связан прежде всего с изменением деформированной формы оболочки до потери устойчивости. С увеличением докритического прогиба в центре площадки нагружения при изменении θ_0 несущая способность оболочки резко снижается. Критическая нагрузка имеет наименьшие значения при нагружении на площадке с угловыми размерами $\theta_0 = \theta_0''$, при которых докритический прогиб максимален в центре площадки. Следует отметить, что форма потери устойчивости поперечного сечения оболочки при этом близка к докритической. Значение θ_0'' зависит от жесткостных параметров оболочки и не превышает θ_0^* , где θ_0^* - центральный угол длины волны собственной формы поперечного сечения оболочки (при потере устойчивости под действием разнородного давления). Пренебрежение докритическим изгибом в оценке устой-

тивности оболочки при таких углах нагружения приводит к существенной погрешности.

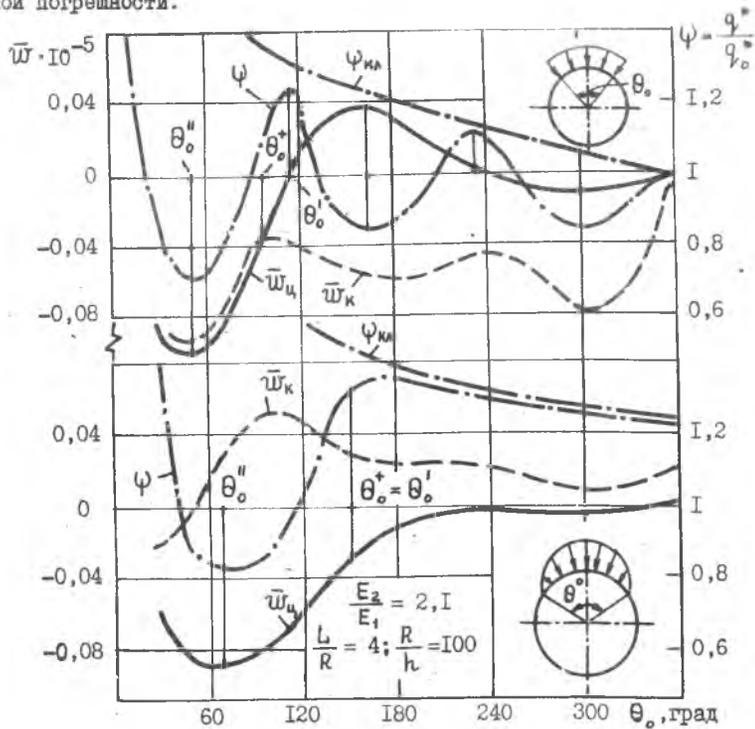


Рис. 2

Наибольшую нагрузку оболочка выдерживает при $\theta_0 = \theta_0'$. При косинусоидальном давлении значение θ_0' соответствует варианту, когда докритические прогибы в центре и на краю площадки одинаковы $\theta_0' = \theta_0''$. При локально-равномерном нагружении максимум критической нагрузки достигается, когда прогиб оболочки в центре площадки нагружения до потери устойчивости равен нулю. Докритическое напряженное состояние в этих случаях определяется в основном нормальными усилиями N_{22}^0 и N_{11}^0 . Причем N_{22}^0 практически не отличается от безмоментных своих значений ($N_{22}^0 = -zR$). При этом критические величины неравномерного давления близки к классическим $\psi_{кл}$, кото-

рые и могут быть приняты в качестве верхней оценки. Практическую оценку снизу, в запас устойчивости, при $\theta_0 = \theta'_0$ можно проводить по известным формулам для равномерного критического давления. Для косинусоидальных нагрузок указанные оценки справедливы и при $\theta_0 > \theta'_0$. Отметим также, что размер площадок нагружения в осевом направлении не влияет на эти качественные особенности.

Таким образом, на основе полученных результатов представляется возможным уже на стадии анализа напряженно-деформированного состояния альтернативных вариантов оболочечных конструкций определить значения «рациональных» θ'_0 и «опасных» θ''_0 углов нагружения, при которых устойчивость оболочки соответственно минимальна и максимальна для данного вида нагрузки. При заданных параметрах конструкции можно назначить угол нагружения θ_0 так, чтобы он был близок к расчетному θ'_0 , а затем достаточно просто провести верхнюю и нижнюю оценки критического уровня нагрузки. В конечном итоге принятое на этапе проектирования решение можно проверить, воспользовавшись представленным выше алгоритмом точного решения задачи устойчивости.

Л и т е р а т у р а

1. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. - М.: Машиностроение, 1982. - 256 с.
2. Махнович С.В., Хищенко Д.М. Исследование устойчивости цилиндрических оболочек под действием несесимметричного давления. - В кн.: Динамика и прочность конструкций. - Челябинск: ЧПИ, 1982, с. 65-73.

УДК 621.787:539.319

С.И.Иванов, В.Ф.Павлов, А.А.Прохоров

РОЛЬ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СОПРОТИВЛЕНИИ УСТАЛОСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ В УСЛОВИЯХ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Все возрастающие требования к надежности и долговечности конструкций приводят к необходимости максимального использования всех резервов повышения прочностных характеристик деталей. Так как разрушение деталей машин при эксплуатации, как правило, начинается с поверхности, сжимающие остаточные напряжения, возникающие в поверхностных слоях детали, являются одним из существенных факторов по-