

УДК 539.374; 539.214

Б.А.Горлач

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА
 ГЛУБОКОЙ ВЫТЯЖКИ ДЕТАЛЕЙ ТИПА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Предлагается метод последовательных нагружений для исследования поведения оболочек вращения в процессе их формообразования. На каждом этапе нагружения решение задачи находится в результате интегрирования соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений задачи. При этом в физических соотношениях учитываются предшествующие напряжения, а геометрические соотношения записываются для конечных деформаций. При переходе к очередному этапу нагружения уточняются геометрические параметры оболочки.

Основные обозначения.

Для всех функций нижние индексы обозначают направления: 1 – вдоль меридиана оболочки, 2 – широты, 3 – нормали к срединной поверхности (рис. 1).

Верхние индексы K и $K + 1$, стоящие в скобках, указывают номер очередного этапа нагружения.

Знак тильды указывает на приращение функции при переходе от K -того состояния оболочки к $(K + 1)$ -му.

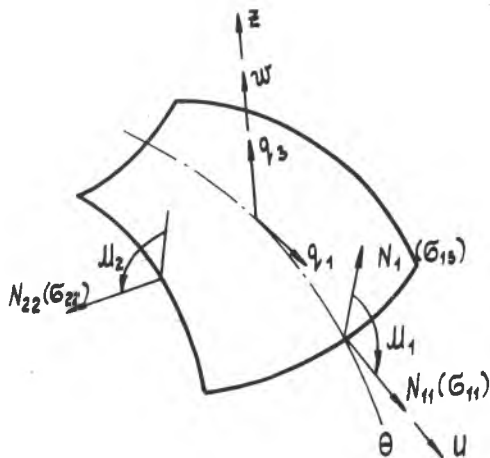


Рис. 1

q_1, q_3 - поверхностная нагрузка;

M_1, M_2 - изгибающие моменты;

N_{11}, N_{22}, N_{13} - осевые усилия и перерезывающая сила;

G_{11}, G_{22}, G_{13} - компоненты тензора напряжений;

$G = \frac{1}{3}(G_{11} + G_{22})$ - среднее напряжение;

s_{11}, s_{22}, s_{13} - компоненты девiatorа напряжений;

$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{33}$ - компоненты тензора конечных деформаций;

e_{11}, e_{22} - компоненты тензора малой деформации;

ψ - угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки;

u, w - перемещение точки оболочки;

R_1, R_2, δ - главные радиусы кривизны и толщина оболочки;

θ - угол, отсчитываемый от оси вращения оболочки до рассматриваемой точки;

G_T - предел текучести материала оболочки, достигнутый на предшествующем этапе ее нагружения;

E, E', ν - модуль Юнга, касательный модуль и коэффициент Пуассона материала оболочки;

δ_{mn} - символ Кронекера;

β, δ_0 - характерные размеры оболочки;

$$H_2 = R_2 \sin \theta.$$

I. Исследование процесса формообразования оболочки, то есть определение текущей геометрии и функций, характеризующих ее напряженно-деформированное состояние, проводится методом последовательных нагружений. Согласно этому методу нагрузка на оболочку прикладывается последовательно, порциями достаточно малыми, чтобы можно было считать, что геометрические параметры оболочки изменяются под действием очередной порции нагрузки на величины, допустимые в нелинейной теории оболочек.

Последовательность нахождения функций, характеризующих поведение оболочки на $(K + 1)$ -ом этапе нагружения, следующий.

Пусть оболочка находится в равновесии под действием сил $q_1^{(K)}$ и $q_3^{(K)}$, приложенных к ее поверхности за K предыдущих этапов нагружения. Будем считать, что нам известны (найлены) функции, характеризующие ее напряженно-деформированное состояние, и форма оболочки: напряжения $G_{mn}^{(K)}$ ($m, n = 1, 2, 3$); деформации $\varepsilon_{mn}^{(K)}$; радиусы кривизны $R_1^{(K)}, R_2^{(K)}$; толщина оболочки $\delta^{(K)}$ и координаты точек θ .

Приложение новой порции нагрузки \tilde{q}_1 и \tilde{q}_3 вызовет в оболочке дополнительные напряжения $\tilde{\sigma}_{mn}$, деформации $\tilde{\epsilon}_{mn}$ и перемещения \tilde{u} , \tilde{w} , определив которые, можно найти напряжения и деформации в оболочке, предшествующие следующему этапу нагружения:

$$\sigma_{mn}^{(k+1)} = \sigma_{mn}^{(k)} + \tilde{\sigma}_{mn}, \quad \epsilon_{mn}^{(k+1)} = \epsilon_{mn}^{(k)} + \tilde{\epsilon}_{mn}. \quad (I.1)$$

Форма оболочки после приложения очередной порции нагрузки определяется полностью радиусами кривизны оболочки, толщиной и координатами точек ее срединной поверхности. Перечисленные параметры, характеризующие геометрию оболочки в деформированном $(k+1)$ -м состоянии и отвечающие соотношениям Кодации-Гаусса [1], могут быть найдены при известных геометрических параметрах k -того состояния и приращениях компонент тензора малой деформации $\tilde{\epsilon}_{mn}$ из следующих зависимостей:

$$\frac{R_1^{(k)}}{R_1^{(k+1)}} = 1 + \tilde{\epsilon}_{11} + \tilde{\epsilon}_{11}^2 - \frac{1}{2} \tilde{\nu}^2 + \frac{d\tilde{\nu}}{d\theta} - \tilde{\nu} \frac{d\tilde{\epsilon}_{11}}{d\theta} - 2\tilde{\epsilon}_{11} \frac{d\tilde{\nu}}{d\theta}, \quad (I.2)$$

$$\frac{R_2^{(k)}}{R_2^{(k+1)}} = 1 + \tilde{\epsilon}_{22} + \tilde{\epsilon}_{22}^2 - \frac{1}{2} \tilde{\nu}^2 + \tilde{\nu} (1 + \tilde{\epsilon}_{11} - \tilde{\epsilon}_{22}) \operatorname{ctg} \theta, \quad (I.3)$$

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta} = \arccos \left(1 - \frac{1}{2} \tilde{\nu}^2 \right). \quad (I.4)$$

Распределение толщины, как функции от θ , определяется по найденным из физических соображений (например, условие несжимаемости материала оболочки для развитых пластических деформаций) компонентам $\tilde{\epsilon}_{33}$ тензора деформаций

$$\delta^{(k+1)} = \delta^{(k)} (1 + \tilde{\epsilon}_{33}). \quad (I.5)$$

Далее, если необходимо, приводят тензора напряжений, деформаций и вектор нагрузок к координатам нового состояния и по описанной схеме решают задачу в следующем приближении и так далее.

Таким образом, для того чтобы определить параметры оболочки и функции, характеризующие ее напряженно-деформированное состояние на $(k+1)$ -м этапе нагружения, необходимо решить на этом этапе геометрически и физически нелинейную задачу теории оболочек, учитывающую начальное напряженное состояние.

Приведем схему решения этой задачи, основанную на аналитическом решении Мейснера-Дурье [2], предложенном для исследования аналогичной задачи в линейной постановке.

2. При выводе разрешающего нелинейного дифференциального уравнения для оболочек вращения использовались следующие исходные уравнения.

а) Уравнения равновесия, записанные для приращений усилий и моментов срединной поверхности оболочки:

$$\frac{1}{R_1^{(k)} H_2^{(k)}} \frac{d}{d\theta} (\tilde{N}_{11} H_2^{(k)}) - \frac{\tilde{N}_{22}}{R_2^{(k)}} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\tilde{N}_{13}}{R_1^{(k)}} - \tilde{q}_1 = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{R_1^{(k)} H_2^{(k)}} \frac{d}{d\theta} (\tilde{N}_{13} H_2^{(k)}) - \frac{\tilde{N}_{11}}{R_1^{(k)}} - \frac{\tilde{N}_{22}}{R_2^{(k)}} + \tilde{q}_3 = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{R_1^{(k)} H_2^{(k)}} \frac{d}{d\theta} (\tilde{M}_1 H_2^{(k)}) - \frac{\tilde{M}_2}{R_2^{(k)}} \operatorname{ctg} \theta - \tilde{N}_{13} = 0. \quad (2.3)$$

Уравнения равновесия (2.1)-(2.3), вообще говоря, нелинейны, так как усилия и моменты в них определяются по несимметричному тензору напряжений (из-за того, что напряжения отнесены к исходной метрике оболочки, соответствующей K -тому состоянию, и в них множителем входит вектор жесткого поворота элемента оболочки [3]).

б) Условия совместности деформаций срединной поверхности используются в виде линейного уравнения для компонент тензора малой деформации, ибо доказано, что нелинейные уравнения совместности деформаций, по крайней мере для оболочек вращения, тождественно удовлетворяются, если удовлетворяется соответствующее им линейное соотношение

$$\frac{1}{R_1^{(k)}} \frac{d}{d\theta} (\tilde{\epsilon}_{22} H_2^{(k)}) - \tilde{\epsilon}_{11} \cos \theta - \tilde{\nu}^2 \cos \theta = 0. \quad (2.4)$$

в) Компоненты тензора конечной деформации выражаются нелинейно через компоненты тензора малой деформации [4]

$$\tilde{\epsilon}_{11} = \tilde{\epsilon}_{11} + \frac{1}{2} (\tilde{\epsilon}_{11}^2 + \tilde{\nu}^2), \quad \tilde{\epsilon}_{22} = \tilde{\epsilon}_{22} + \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_{22}^2, \quad \tilde{\epsilon}_{13} = \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_{11} \tilde{\nu}, \quad (2.5)$$

где

$$\tilde{\epsilon}_{11} = \frac{1}{R_1^{(k)}} \left(\frac{d\tilde{u}}{d\theta} + \tilde{w} \right), \quad \tilde{\epsilon}_{22} = \frac{1}{R_2^{(k)}} (\tilde{w} + \tilde{u} \operatorname{ctg} \theta), \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{R_1^{(k)}} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\theta} - \tilde{u} \right). \quad (2.6)$$

г) Физические соотношения связывают компоненты тензора приращения напряжений $\tilde{\sigma}_{mn}$ с компонентами девиатора напряжений $\mathcal{S}_{mn}^{(k)}$ и приращениями тензора конечной деформации $\tilde{\epsilon}_{mn}$:

$$\tilde{\sigma}_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \{ [1-f^{(k)} (\mathcal{S}_{11}^{(k)2} + \nu \mathcal{S}_{22}^{(k)2})] \tilde{\epsilon}_{11} + \nu [1-f^{(k)} (\mathcal{S}_{11}^{(k)2} + \mathcal{S}_{22}^{(k)2})] \tilde{\epsilon}_{22} \}, \quad (2.7)$$

$$\tilde{\Theta}_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \{ [1-f^{(K)} (\delta_{22}^{(K)2} + \nu \delta_{11}^{(K)2})] \tilde{E}_{22} + \nu [1-f^{(K)} (\delta_{11}^{(K)2} + \delta_{22}^{(K)2})] \tilde{E}_{11} \}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{\Theta}_{13} = \frac{E}{1+\nu} [1-4(1-\nu) f^{(K)} \delta_{13}^{(K)2}] \tilde{E}_{13}. \quad (2.9)$$

Здесь

$$f^{(K)} = P^{(K)} \{ E^{(K)} + P^{(K)} [\delta_{11}^{(K)2} + 2\nu \delta_{11}^{(K)} \delta_{22}^{(K)} + \delta_{22}^{(K)2} + 4(1-\nu) \delta_{13}^{(K)2}] \}^{-1}, \quad (2.10)$$

$$P^{(K)} = \frac{9E}{4G_T^{(K)2}(1-\nu^2)}.$$

Преобразуя уравнения (2.1)-(2.10) по методу Мейснера-Дурье [2], можно свести их на $(K+1)$ -м приближении к одному нелинейному дифференциальному уравнению. Решение этого уравнения, выраженное через некоторую комплексную функцию \mathcal{T} для нелинейной задачи, получается в результате интегрирования уравнений в виде

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\beta^{(K)} \sqrt{\beta^{(K)} R_2^{(K)} \sin^2 \theta}} \{ \tilde{C}_1 \exp[-\gamma(1-i)x] + \tilde{C}_2 \exp[\gamma(1-i)x] \} + \frac{2i\gamma^2}{\beta^{(K)2} b \sin^2 \theta} \tilde{\Phi}_2 - \frac{R_2^{(K)}}{R_1^{(K)}} (\tilde{W} + \underline{W}_H). \quad (2.11)$$

Здесь \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 - комплексные постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий,

$$\beta^{(K)} = \frac{\delta^{(K)}}{\delta_0}, \quad \gamma = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{b}{\delta_0}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{b}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R_1^{(K)}}{\sqrt{\beta^{(K)} R_2^{(K)}}} d\theta, \quad (2.12)$$

$$\tilde{W} = \frac{\nu}{H_2^{(K)}} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\tilde{\Phi}_1}{\beta^{(K)}} \right) + \frac{R_1^{(K)} \cos \theta}{\beta^{(K)} H_2^{(K)2}} \tilde{\Phi}_1, \quad (2.13)$$

$$\tilde{\Phi}_1 = -\tilde{Q}_H \cos \theta + \tilde{Q}_\nu \sin \theta, \quad \tilde{\Phi}_2 = -\tilde{Q}_H \sin \theta - \tilde{Q}_\nu \cos \theta, \quad (2.14)$$

$$\tilde{Q}_H = \int_{\theta_0}^{\theta} (\tilde{q}_3 \sin \theta + \tilde{q}_1 \cos \theta) R_1^{(K)} H_2^{(K)} d\theta, \quad \tilde{Q}_\nu = \int_{\theta_0}^{\theta} (\tilde{q}_3 \cos \theta - \tilde{q}_1 \sin \theta) R_1^{(K)} H_2^{(K)} d\theta. \quad (2.15)$$

Подчеркнутое в (2.11) слагаемое W_H представляет собой нелинейный член, зависящий как от геометрической, так и от физической нелинейностей:

$$W_H = \frac{E \delta_0}{R_2^{(K)} \sin \theta} [R_1^{(K)} E_H \cos \theta - \frac{d}{d\theta} (H_2^{(K)} E_{22})]. \quad (2.16)$$

Здесь

$$E_{11} = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \delta_{11}^{(K)} \tilde{S} dz - \frac{1}{2} (\tilde{e}_{11}^2 + \tilde{\gamma}^2), \quad (2.17)$$

$$E_{22} = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \delta_{22}^{(K)} \tilde{S} dz - \frac{1}{2} \tilde{e}_{22}^2, \quad (2.18)$$

$$\tilde{S} = \frac{9}{4G_T^{(K)^2} E^{(K)}} (\delta_{11}^{(K)} \tilde{G}_{11} + \delta_{22}^{(K)} \tilde{G}_{22} + 2\delta_{13}^{(K)} \tilde{G}_{13}). \quad (2.19)$$

Через функцию $\tilde{\tau}$ (2.1) можно выразить усилия, деформации, перемещения и другие искомые величины, необходимые для анализа поведения оболочки и для записи граничных условий. Приведем выражения лишь для некоторых из этих функций:

$$\tilde{N}_{11} = -\frac{\beta\beta^{(K)^2} \cos\theta}{2\gamma^2 H_2^{(K)}} \gamma_m \tilde{\tau} + \frac{\tilde{\Phi}_1}{H_2^{(K)}}, \quad \tilde{N}_{22} = -\frac{\beta\beta^{(K)^2}}{2\gamma^2 R_1^{(K)}} \frac{d}{d\theta} \gamma_m \tilde{\tau}, \quad (2.20)$$

$$\tilde{e}_{11} = \frac{1}{E\delta_0} (\tilde{N}_{11} - \nu\tilde{N}_{22}) + E_{11}, \quad \tilde{e}_{22} = \frac{1}{E\delta_0} (\tilde{N}_{22} - \nu\tilde{N}_{11}) + E_{22}, \quad (2.21)$$

$$\tilde{\gamma} = -\frac{1}{E\delta_0} \operatorname{Re} \tilde{\tau}, \quad \tilde{\omega} = \tilde{e}_{22} R_2^{(K)} - \tilde{u} \operatorname{ctg} \theta, \quad (2.22)$$

$$\tilde{u} = \sin\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R_1^{(K)}}{\sin\theta} (\tilde{e}_{11} - \tilde{e}_{22} \frac{R_2^{(K)}}{R_1^{(K)}}) d\theta + D. \quad (2.23)$$

В последнем выражении D - постоянная интегрирования.

Полное решение задачи можно получить итерационным методом, принимая в нулевом приближении $(K+1)$ -го этапа нагружения нелинейные функции E_{11} и E_{22} равными нулю, а затем определяя их в последующих приближениях по формулам (2.3)-(2.4) как функции от найденных в предыдущих приближениях напряжений и деформаций.

Вычисленные таким образом функции являются решениями задачи на $(K+1)$ -м шаге нагружения.

Л и т е р а т у р а

1. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1961.
2. Чернина В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М., "Наука", 1968.
3. Горлач Б.А., Мокеев Б.В. Построение замкнутой системы уравнений упругого деформирования твердых тел с начальными напряжениями. - В кн.: Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сб., вып. I, Куйбышевский авиационный институт, 1974.
4. Новожилов В.В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.