

Аналогичная формула использовалась и для определения  $E_{p_2}(t)$ .

### Л и т е р а т у р а

1. Жигалова Р.И. К вопросу о приросте перемещения во времени стеклопластиковой лопасти несущего винта вертолета под действием собственного веса. - Механика полимеров, 1975, № 5, с.943-946.

2. Розовский М.И. Известия АН СССР, Механика и машиностроение 1961, № 2, с.30-36.

УДК 539.4:534.1

М.Б.Вахитов, А.С.Сафонов, И.А.Кузнецов

### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ ТОРЦОВ

В /1/ изложена численная методика расчета свободных колебаний тонкостенной подкрепленной авиаконструкции. В ее основе принята уточненная дискретно-континуальная модель в варианте теории Ю.Г.Одинокова /2/. Далее /3/ на примере консольной конструкции, используемой при расчете несущих поверхностей (крыло, оперение) летательного аппарата, исследовалось влияние характера закрепления продольных ребер жесткости на частоты и формы ее свободных колебаний. В настоящей работе приводится обобщение этой методики на случай незакрепленной конструкции (плавающая схема), а также закрепления по обоим ее торцам.

1. Аналогично/3/ можно показать, что для незакрепленной конструкции основные уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} A_1 U' + \nu^2 A_2 U' &= A_3 U_0 + \nu^2 (A_4 U_0 + A_6 \xi' + F_1 \xi_0) \\ \xi' + \nu^2 (B_4 \xi' + F_2 \xi_0) &= B_1 U' + B_2 U_0, \end{aligned} \quad (I)$$

где  $U'$  - столбец порядка  $n_k$  значений деформаций продольных ребер;  $\xi' = \{\xi, \alpha, \beta\}$  - столбец порядка  $3k$  ( $\xi$  - относительный угол закручивания;  $\alpha$  и  $\beta$  - углы наклона касательной к деформированному положению продольной оси  $Oz$  конструкции в лобовой и нормальной плоскостях);  $U_0$  - столбец порядка  $n$  значений осевых перемещений ребер на торце  $z = 0$ ;  $\xi_0 = \{\varphi_0, y_{x_0}, y_{y_0}\}$  - столбец значений угла закручивания и прогибов в обеих плоскостях в сечении  $z = 0$ :

$$A_1 = C + \mathcal{Y}_2(X_1 \mathcal{Y}_1 + X_2); \quad A_2 = \mathcal{Y}_2 M_1 C; \quad A_3 = \mathcal{Y}_2 X_1 L_1;$$

$$A_4 = M_2 L_1; \quad A_6 = \mathcal{Y}_2 X_4 T_1; \quad B_1 = -X_5 \mathcal{Y}_1 + X_6 C; \quad B_2 = X_5 L_1;$$

$$B_4 = T T_1; \quad F_1 = \mathcal{Y}_2 X_4 T_2 L_2; \quad F_2 = T T_2 L_2.$$

Напомним, что  $C, X_1, X_2, X_4, X_5, X_6, T, T_1, T_2, M_1, M_2$  - матрицы жесткостных и массовых характеристик поперечных сечений конструкции;  $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$  - квазидиагональные матрицы порядка  $n \times k$ , составленные из интегрирующих матриц  $[Y_1], [Y_2]$  /4/ порядка  $k$ ;  $L_1, L_2$  - преобразующие матрицы порядка  $n \times n$ ;  $3 \times 3$  и имеющие следующую структуру:

$$L = \begin{bmatrix} e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e \end{bmatrix},$$

где  $e$  - единичный столбец порядка  $k$ ;  $n, k$  - число продольных ребер в поперечном сечении конструкции и расчетных сечений, выбранных по ее длине;  $\nu$  - круговая частота.

Выполняя краевые условия для продольных ребер на торце  $z = 0$  вида  $P_j(z=0) = 0, (j = 1, \dots, n)$  аналогично /3/, уравнения (I) сведем к виду:

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 X + \nu^2 \bar{A}_2 X &= \nu^2 (A_6 X' + F_1 X_0) \\ X' + \nu^2 B_4 X' &= -\nu^2 F_2 X_0 + \bar{B}_1 X. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти соотношения помимо векторов неизвестных  $X = \{U'_{ij}, U_{oi}\}$  и  $X'$  содержат неизвестную пока постоянную  $X_0$ , которую можно определить из условия отсутствия в сечении  $z = 0$  момента  $M_z$  и перерезывающих сил  $Q_x, Q_y$  в двух плоскостях. Воспользуемся для этого уравнениями равновесия сил в сечении тонкостенной конструкции /2/, которые в матричной форме запишутся:

$$M q + N C U' = S, \quad (3)$$

где  $q = \bar{X}_1 Y_1 U' + \bar{X}_2 C U' + \bar{X}_3 L_1 U_0 + \bar{X}_4 Y_1 S$  - столбец погонных касательных усилий в панелях обшивки;  $M, N$  - матрицы, определяемые геометрическими характеристиками конструкции;  $S = \{M_z Q_x Q_y\}$  - столбец внешней нагрузки, который в случае свободных колебаний

принимает вид:

$$S = \nu^2 T_1 \bar{x}' + \nu^2 T_2 \bar{x}_0. \quad (4)$$

Учитывая (4) и выполняя краевые условия в (3) по аналогии с (I), соотношения (3) можем представить:

$$B X + \nu^2 \bar{T}_1 \bar{x}' + \nu^2 \bar{T}_2 \bar{x}_0 = S, \quad (5)$$

где  $B$  - матрица порядка  $3k \times nk$ ;  $\bar{T}_1 = M X_4 T_1$ ;  $\bar{T}_2 = M X_4 T_2$  - матрицы порядка  $3k \times 3k$ .

Полагая теперь, что на торце  $\bar{z} = 0$  перерезывающие силы и момент  $M_{\bar{z}}$  внутренних сил равны нулю, и разрешая (5) относительно  $\bar{x}_0$ , получим:

$$L_2 \bar{x}_0 = -\frac{1}{\nu^2} \bar{T}_2^{-1} B X - \bar{T}_2^{-1} \bar{T}_1 \bar{x}' - S, \quad (6)$$

после чего, выделяя сечение  $\bar{z} = 0$ , в силу структуры матрицы  $L_2$  можно записать:

$$\bar{x}_0 = -\frac{1}{\nu^2} d_1 X + d_2 \bar{x}', \quad (7)$$

где  $d_1$ ,  $d_2$  - матрицы порядка  $3 \times nk$  и  $3k \times k$ , получаемые из  $(1 + ki)$ , ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) строк матричных произведений  $\bar{T}_2^{-1} B$  и  $\bar{T}_2^{-1} \bar{T}_1$  порядка  $3k \times nk$  и  $3k \times 3k$  соответственно.

Подставляя далее (7) в (2), можно показать, что задача расчета свободных колебаний подкрепленной конструкции сводится к определению собственных значений  $\lambda = 1/\nu^2$  и векторов  $U = \{U', U_0, \bar{x}'\}$  динамической матрицы  $D = N_1^{-1} N_2$ , где

$$N_1 = \left[ \begin{array}{c|c} \bar{A}_1 + F_1 d_1 & 0 \\ \hline \bar{B}_1 + F_2 d_1 & E \end{array} \right]; \quad N_2 = \left[ \begin{array}{c|c} \bar{A}_2 & A_6 + F_1 d_2 \\ \hline 0 & B_4 + F_2 d_2 \end{array} \right];$$

$E$  - единичная матрица порядка  $3k$ .

2. Рассмотрим более сложный вариант краевых условий - закрепление тонкостенной конструкции по обоим торцам. Полагаем, что продольные ребра в сечениях  $\bar{z} = 0$  и  $\bar{z} = l$  ( $l$  - длина конструкции), так же как и в /3/, могут иметь произвольное крепление - жесткое, свободное, упругое.

Усилил, перемещения и деформации продольных элементов для этого случая представим в виде:

$$P = \bar{P} + L_1 P_e; \quad U = Y_1 C^{-1} (\bar{P} + L_1 P_e) + L_1 U_o; \quad U' = C^{-1} (\bar{P} + L_1 P_e), \quad (8)$$

где  $\bar{P}$  - столбец порядка  $n \times k$  осевых усилий, определенных для конструкции с незакрепленным торцом  $z = \ell$ ;  $P_e = \{P_{e1}, \dots, P_{ene}\}$  - столбец порядка  $n$  значений осевых усилий ребер в сечении  $z = \ell$ .

Погонная осевая инерционная нагрузка ребер  $P_m$ , а также нагрузка  $S$ , обусловленная общими перемещениями конструкции, запишутся:

$$P_m = \nu^2 M_1 (\bar{P} + L_1 P_e) + \nu^2 M_2 L_1 U_o \\ S = \nu^2 T_1 \bar{x}' + L_2 S_e, \quad (9)$$

где  $S_e = \{M_{ze}, Q_{xe}, Q_{ye}\}$  - столбец значений  $M_z$  и перерезывающих сил на правом торце конструкции  $z = \ell$ . Эти величины определяются из условия равенства нулю в сечении  $z = \ell$  угла поворота  $\varphi$  и прогибов  $U_x, U_y$  в лобовой и нормальных плоскостях. При записи (9) учтено, что  $\bar{x}_o = 0$  вследствие закрепления левого торца  $z = 0$  конструкции.

Аналогично предыдущему случаю нетрудно показать, что основные уравнения в случае закрепленной по двум торцам конструкции запишутся:

$$A_1 C^{-1} (\bar{P} + L_1 P_e) + \nu^2 A_2 C^{-1} (\bar{P} + L_1 P_e) = A_3 U_o + \\ + \nu^2 A_4 U_o + \nu^2 A_6 \bar{x}' + G_1 S; \quad (10) \\ \bar{x}' + \nu^2 B_4 \bar{x}' = B_1 C^{-1} (\bar{P} + L_1 P_e) + B_2 U_o + G_2 S_e,$$

где  $G_1 = Y_2 X_4 Y_1^* L_2$ ;  $G_2 = T Y_1^* L_2$ ;

$$Y_1^* = \begin{bmatrix} [Y_1] & 0 & 0 \\ 0 & -[Y_1] & 0 \\ 0 & 0 & -[Y_1] \end{bmatrix} \quad - \text{ матрица порядка } 3k.$$

Выполняя процедуру, аналогичную изложенной в /3/, для сечения  $z = \ell$  столбец  $P_e$  неизвестных пока усилий запишем в виде:

$$P_e = S_1 \bar{P} + S_2 U_o, \quad (11)$$

где  $S_1, S_2$  - матрицы порядка  $n \times nk$ .

Подставляя  $P_e$  (II) в (IO) и выполняя краевые условия для продольных ребер в сечении  $z = 0$  /3/, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 X + \nu^2 \tilde{A}_2 X &= \nu^2 A_6 X' + G_1 S_e \\ X' + \nu^2 B_4 X' &= \tilde{B}_1 X + G_2 S_e, \end{aligned} \quad (I2)$$

где  $X = \{\bar{P}_{ij}, U_{oi}\}$  - вектор порядка  $nk$ ;  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{B}_1$  - матрицы порядка  $nk \times nk$ ,  $nk \times nk$ ,  $3k \times nk$  соответственно, полученные в результате преобразований, аналогичных рассмотренным в /3/.

В уравнениях (I2) остается пока неизвестным столбец  $S_e$  реакций в сечении  $z = \ell$ , который определяем с помощью второго соотношения системы (I2). Интегрируя это соотношение от 0 до  $\ell$ , получим:

$$X + \nu^2 \gamma_1^* B_4 X' = \gamma_1^* \tilde{B}_1 X + \gamma_1^* G_2 S_e, \quad (I3)$$

где  $X = \{\varphi, Y_x, Y_y\}$  - столбец порядка  $3k$ .

Выделяя из (I3) строки, соответствующие сечению  $z = \ell$ , и учитывая, что на закрепленном правом торце  $X(z = \ell) = 0$ , запишем

$$bX + a S_e + \nu^2 d X' = 0. \quad (I4)$$

Разрешая (I4) относительно  $S_e$ , получим:

$$S_e = -a^{-1} bX - \nu^2 a^{-1} d X', \quad (I5)$$

где  $b, a, d$  - матрицы порядка  $3 \times nk, 3 \times 3, 3 \times 3k$ , составленные из последних  $k$ -ых строк матричных произведений

$\gamma_1^* \tilde{B}_1, \gamma_1^* G_2, \gamma_1^* B_4$  соответственно. Подставляя  $S_e$  (I5) в (I2), можно задачу расчета окончательно свести к решению обычного частотного уравнения

$$(\lambda E - D) Y = 0, \quad (I6)$$

где  $Y = \{X, X'\}$ ;  $D = N_1^{-1} N_2$

$$N_1 = \begin{bmatrix} A_1^* & | & 0 \\ \hline B_1^* & | & E \end{bmatrix}; \quad N_2 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_2 & | & A_6^* \\ \hline 0 & | & B_4^* \end{bmatrix}$$

$$A_1^* = \tilde{A}_1 + G_1 \alpha^{-1} B; \quad B_1^* = \tilde{B}_1 - G_2 \alpha^{-1} \tilde{B}$$

$$A_6^* = A_6 + G_1 \alpha^{-1} d; \quad B_4^* = B_4 + G_2 \alpha^{-1} d.$$

3. По найденным значениям векторов неизвестных  $U$  в каждом из рассмотренных случаев закрепления конструкции можно определить формы общих деформаций  $\varphi$ ,  $U_x$ ,  $U_y$ , осевых перемещений продольных ребер  $U_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), а также характер распределения нормальных и касательных напряжений в силовых элементах конструкции, соответствующих этим формам.

Следует отметить, что в общем случае учета инерционных сил динамическая матрица  $D$  имеет высокий порядок, равный  $(n+3)k$ . Однако в случае использования допущения о незначительности части инерционных сил продольных ребер, обусловленных деформациями поперечных сечений конструкции /1/, уравнения по расчету свободных колебаний распадутся на две последовательно решаемые системы уравнений меньшего порядка, что дает возможность существенно снизить трудоемкость расчета. Опуская соответствующие преобразования, отметим лишь, что при этом задача сводится к определению собственных значений и векторов динамической матрицы невысокого порядка, равного  $3k$ , решением которой определяются основные тона, соответствующие общим деформациям конструкции.

В случае необходимости нахождения остальных  $nk$  тонов из общей динамической матрицы следует предварительно исключить известными методами линейной алгебры найденные уже  $3k$  тонов. Рассмотрением далее редуцированной таким образом матрицы определяются недостающие  $nk$  тонов. Однако практически такой необходимости, как правило, не возникает, поскольку эти допол-

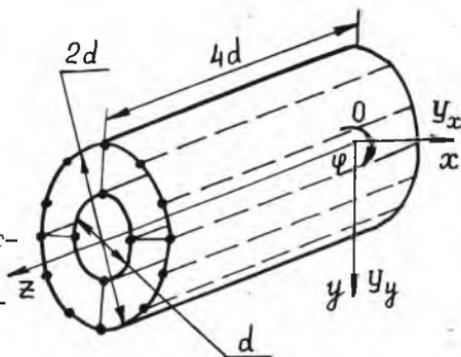


Рис.

нительные  $nk$  тонов определяются в основном осевыми перемещениями ребер жесткости, на которые податливость реальных авиаконструкций обычно существенно ниже, чем на общие деформации, учитываемые

упрощенными уравнениями порядка  $3k$ .

Методика реализована в виде матобеспечения, составленного на языке ФОРТРАН-IV для ЭВМ среднего класса типа ЕС. Ниже для иллюстрации методики приведены результаты расчета одной из реальных конструкций (рис.) с различными условиями закрепления в виде отношения частот, получаемых по предлагаемой методике, к их значениям определенным по простейшей стержневой модели (в таблице обозначен  $\varphi$  - крутильные,  $U_x$  - изгибные колебания). Как и следовало ожидать, усложнение характера закрепления торцов и форм колебаний приводит к увеличению частот крутильных колебаний (стеснение деформаций поперечных сечений) и уменьшению их для изгибных (учет дополнительного прогиба от сдвига) по сравнению с балочной схемой.

№ тона	Свободная схема		Консольная схема		Двухторцовое закрепление	
	$U_x$	$\varphi$	$U_x$	$\varphi$	$U_x$	$\varphi$
1	0,996	1,000	0,972	1,162	0,965	1,237
2	0,961	1,057	0,920	1,216	0,878	1,377
3	0,912	1,123	0,840	1,355	0,730	1,505
4	0,867	1,168	0,750	1,499	0,648	1,670

#### Л и т е р а т у р а

1. Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Сафонов А.С. К расчету свободных колебаний тонкостенных авиаконструкций. - Изв. вузов. Авиационная техника, 1975, № 4, с.52-57.

2. Одинцов Ю.Г. Напряжения и деформации в тонкостенных конструкциях переменного сечения. - Труды КАИ, вып. 20. Казань, 1948, с. 3-15.

3. Сафонов А.С., Кузнецов И.А. Свободные колебания тонкостенных подкрепленных конструкций с неоднородными краевыми условиями. В кн.: Прочность и колебания авиационных конструкций. - Казань: КАИ, 1984, с.15-21.

4. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы - аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики. - Изв. вузов. Авиационная техника, 1966, № 3, с.50-61.