ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, 1980

УДК 539.3

В.Н.Паймушин

СМЕШАННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА-КАСТИЛЬЯНО В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

К настоящему времени в теории оболочек получили весьма широкое применение методы, в основе которых лежат вариационные принципы (Лагранжа, Кастильяно, Рейсснера [1] и др.). Разработка и применение вариационных методов в механике деформируемых тел были предметом многочисленных исследований. Для решения многих задач в классической теории пологих оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, в качестве вариационных формул преимущественно используются детально разработанные к настоящему времени вариационные уравнения Лагранжа и Кастильяно или более общие смешанные вариационные формулы Н.А.Алумяэ [2, 3] и типа Рейсснера [3]. В теории оболочек типа Тимошенко некоторые из вариационных формул, обобщающие известные в классической теории оболочек Кирхгофа-Лява, в линейной постановке получены в работах Б.Л.Пелеха [4], а в нелинейной – Л.Я.Айнолы [5] и К.З.Галимова [3, 6].

В данной статье в развитие работы [7] предложен один вариант функционала смешанного типа нелинейной теории пологих оболочек типа Тимошенко, из которого при варьировании по перемещениям, усилиям и моментам следует вариационное уравнение, содержащее в себе вариационные уравнения как принципа возможных перемещений Лагранжа, так и принципа Кастильяно. В работе приняты основные обозначения из [3, 7].

Введем в рассмотрение функционал (здесь и в дальнейшем все величины, помеченные индексом $\mathfrak{s}$ – заданные на контуре Γ)

$$P = A - \iint\limits_{G} \left(T^{ik}\varepsilon_{ik} + M^{ik}\text{æ}_{ik} + 2N^{i}\varepsilon_{i3} + \frac{1}{2}\omega_i\omega_k T^{ik} \right) d\sigma, \qquad (1)$$

$$A=\iint_{G}(\bar{X}\bar{v}+\bar{M}\bar{\gamma})\,d\sigma+\int_{\Gamma_{(1)}}(\bar{v}\,\bar{\Phi}^{s}+\bar{\gamma}\,\bar{G}^{s})\,ds+$$
$$+\int_{\Gamma_{(2)}}(\bar{v}^{s}\bar{\Phi}+\bar{\gamma}^{s}\bar{G})\,ds, \qquad (2)$$

где

$$\bar{X}=X^{i}\bar{r}_{i}+X^{3}\bar{m},\quad \bar{M}=M^{i}\bar{r}_{i},\quad \bar{v}=u_{i}\bar{r}^{i}+w\bar{m},$$

$$\bar{\gamma}=\gamma_{i}\bar{r}^{i},\quad \bar{\Phi}^{s}=\Phi^{s}_{n}\bar{n}+\Phi^{s}_{\tau}\bar{\tau}+\Phi^{s}_{m}\bar{m},$$
$$\bar{G}^{s}=G^{s}_{n}\bar{n}+G^{s}_{\tau}\bar{\tau},\qquad \bar{v}^{s}=u^{s}_{n}\bar{n}+u^{s}_{\tau}\bar{\tau}+w^{s}\bar{m}, \qquad (3)$$
$$\bar{\gamma}^{s}=\gamma^{s}_{n}\bar{n}+\gamma^{s}_{\tau}\bar{\tau},\qquad \bar{\Phi}=T_{n}\bar{n}+T_{n\tau}\bar{\tau}+\Phi_{m}\bar{m},$$
$$\bar{G}=G_{n}\bar{n}+G_{n\tau}\bar{\tau}.$$

На части $\Gamma_{(1)}$ контура Γ оболочки потребуем выполнения статических граничных условий

$$\Phi^{s}_{n}=T_{n},\quad \Phi^{s}_{\tau}=T_{n\tau},\quad \Phi^{s}_{m}=\Phi_{m}=N+T_{n}\omega_{n}+T_{n\tau}\,\omega_{\tau}, \qquad (4)$$
$$G^{s}_{n}=G_{n},\quad G^{s}_{\tau}=G_{n\tau},$$

а на остальной части $\Gamma_{(2)}$ этого контура – геометрических граничных условий

$$u^{s}_{n}=u_{n},\quad u^{s}_{\tau}=u_{\tau},\quad w^{s}=w,\quad \gamma^{s}_{n}=\gamma_{n},\quad \gamma^{s}_{\tau}=\gamma_{\tau}. \qquad (5)$$

Считая, что варьированное напряженное состояние является статически возможным, удовлетворяющим уравнениям равновесия

$$\delta L^{k}=\nabla_{i}\delta T^{ik}+\delta X^{k}=0,\quad \delta L^{3}=\nabla_{k}\delta N^{k3}+b_{ik}\delta T^{ik}+\delta X^{3}=0,$$

$$\delta L^{k+3}=\nabla_{i}\delta M^{ik}-\delta N^{k}+\delta M^{k}=0, \qquad (6)$$

$$\delta N^{i3}=\delta N^{i}+\delta(T^{ik}\omega_{k}), \qquad (7)$$

докажем следующую теорему:

– перемещения, внутренние и внешние усилия и моменты, удовлетворяющие внутри оболочки уравнениям равновесия (6) и [6]

$$L^{\kappa} = \nabla_i T^{i\kappa} + X^{\kappa} = 0, \quad L^3 = \nabla_\kappa N^{\kappa 3} + b_{i\kappa} T^{i\kappa} + X^3 = 0,$$

$$L^{\kappa+3} = \nabla_i M^{i\kappa} - N^{\kappa} + M^{\kappa} = 0,$$

а на контуре – граничным условиям (4), (5), сообщают функциона[л] P стационарное значение, причем предполагается, что функцио[]нальные аргументы u_i, w, γ_i, $T^{i\kappa}$, N^i, $M^{i\kappa}$ варьируют[ся] независимо друг от друга.

Действительно, варьируя (I) по всем функциональным аргуме[н]там, получим

$$\begin{aligned}\delta P = &\iint_{\sigma} (\bar{X}\delta\bar{v} + \bar{M}\delta\bar{\gamma} + \bar{v}\delta\bar{X} + \bar{\gamma}\delta\bar{M})\,d\sigma + \\ &+ \int_{\Gamma_{(1)}} (\bar{\Phi}^s\delta\bar{v} + \bar{G}^s\delta\bar{\gamma})\,ds + \int_{\Gamma_{(2)}} (\bar{v}^s\delta\bar{\Phi} + \bar{\gamma}^s\delta\bar{G})\,ds - \\ &- \iint_{\sigma} (T^{i\kappa}\delta\varepsilon_{i\kappa} + M^{i\kappa}\delta æ_{i\kappa} + 2N^i\delta\varepsilon_{i3} + \varepsilon_{i\kappa}\delta T^{i\kappa} + \\ &+ 2\varepsilon_{i3}\delta N^i + \frac{\omega_i\omega_\kappa}{2}\delta T^{i\kappa} + \omega_i T^{i\kappa}\delta\omega_\kappa)\,d\sigma.\end{aligned} \quad (9)$$

Внося сюда выражения

$$2\varepsilon_{i\kappa} = e_{i\kappa} + e_{\kappa i} + \omega_i\omega_\kappa, \quad 2æ_{i\kappa} = \nabla_i\gamma_\kappa + \nabla_\kappa\gamma_i,$$

$$2\varepsilon_{i3} = \omega_i + \gamma_i, \quad e_{i\kappa} = \nabla_i u_\kappa - b_{i\kappa} w, \quad \omega_i = \nabla_i w$$

и интегрируя по частям члены с производными перемещений u_i, w и поворотов γ_i, приходим к равенству

$$\begin{aligned}\delta P = &\int_{\Gamma_{(1)}} [(\bar{\Phi}^s - \bar{\Phi})\delta\bar{v} + (\bar{G}^s - \bar{G})\delta\bar{\gamma}]\,ds + \int_{\Gamma_{(2)}} [(\bar{v}^s - \bar{v})\delta\bar{\Phi} + \\ &+ (\bar{\gamma}^s - \bar{\gamma})\delta\bar{G}]\,ds + \iint_{\sigma} (L^{\kappa}\delta u_\kappa + L^3\delta w + L^{\kappa+3}\delta\gamma_\kappa + \\ &+ u_\kappa\delta L^{\kappa} + w\,\delta L^3 + \gamma_\kappa\delta L^{\kappa+3})\,d\sigma.\end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) следует, что вариационное уравнение $\delta P = 0$ вы[]полняется, если:

I) внутренние и внешние усилия и моменты удовлетворя[ют] уравнениям равновесия (8), а их вариации – уравнениям (6);

2) на части $\Gamma_{(1)}$ контура Γ выполняются статические гранич-
ные условия (4), а на части $\Gamma_{(2)}$ этого контура – геометрические граничные условия (5).

Обратно, в силу независимости напряжений и перемещений из условия стационарности $\delta P = 0$ следуют уравнения равновесия, а в качестве естественных граничных условий вытекают статические и геометрические граничные условия. Заметим также, что при предварительном выполнении вариационного уравнения Лагранжа

$$\delta P_Л = \int_{\Gamma_{(1)}} [(\bar{\Phi}^s - \bar{\Phi})\delta\bar{v} + (\bar{G}^s - \bar{G})\delta\bar{\gamma}]\,ds + \iint_G (L^k \delta u_k + L^3 \delta w + L^{k+3}\delta\gamma_k)\,d\sigma = 0 \qquad \text{(II)}$$

из (I0) вытекает вариационное уравнение принципа Кастильяно

$$\delta P_К = \int_{\Gamma_{(2)}} [(\bar{v}^s - \bar{v})\delta\bar{\Phi} + (\bar{\gamma}^s - \bar{\gamma})\delta\bar{G}]\,ds + \iint_G (u_k \delta L^k + w\,\delta L^3 + \gamma_k \delta L^{k+3})\,d\sigma = 0, \qquad \text{(I2)}$$

и, наоборот, при выполнении (I2) из (I0) получаем вариационное уравнение принципа Лагранжа. Следовательно, уравнение $\delta P = 0$, определенное равенством (9), является уравнением смешанного вариационного принципа Лагранжа-Кастильяно.

Придадим условию стационарности $\delta P = 0$ несколько иную форму. Для этого исключим из (9) δM^i согласно равенствам

$$\delta M^i = \delta N^i - \nabla_k \delta M^{ik}$$

и воспользуемся некоторыми преобразованиями, примененными при получении (I0)

$$\delta P' = \delta P_Л + \int_{\Gamma_{(2)}} (\bar{v}^s \delta\bar{\Phi} + \gamma^s \delta\bar{G})\,ds + \iint_G (u_i \delta X^i + w\,\delta X^3)\,d\sigma - \iint_G \Big(\gamma_k \nabla_i \delta M^{ik} + \varepsilon_{ik}\delta T^{ik} + æ_{ik}\delta M^{ik} + \omega_i \delta N^i + \frac{\omega_i \omega_k}{2}\delta T^{ik} + T^{ik}\omega_k \delta\omega_i\Big)\,d\sigma = 0. \qquad \text{(I3)}$$

Выделим из (I3) слагаемые:

$$\iint_G (\gamma_i \nabla_k \delta M^{ik} + æ_{ik}\delta M^{ik})\,d\sigma = \int_{\Gamma_{(2)}} \gamma_i n_k \delta M^{ik}\,ds +$$

$$+\iint_G (-\nabla_k \gamma_i \,\delta M^{ik} + \varkappa_{ik}\,\delta M^{ik})\,d\sigma = \int_{\Gamma_{(2)}} \gamma_i n_k \,\delta M^{ik}\,ds =$$

$$= \int_{\Gamma_{(2)}} (\gamma_n \,\delta G_n + \gamma_\tau \,\delta G_{n\tau})\,ds = \int_{\Gamma_{(2)}} \bar{\gamma}\,\delta \bar{G}\,ds, \qquad (а$$

$$\iint_G (\omega_i \,\delta N^i + T^{ik}\omega_k \,\delta\omega_i)\,d\sigma = \int_{\Gamma_{(2)}} (w n_i \,\delta N^i + T^{ik} w n_k \,\delta\omega_i)\,ds -$$

$$- \iint_G w\left[\nabla_i \,\delta N^i + \nabla_i (T^{ik}\,\delta\omega_k)\right] d\sigma =$$

$$= \int_{\Gamma_{(2)}} (\delta N + T_n \,\delta\omega_n + T_{n\tau}\,\delta\omega_\tau)\,w\,ds -$$

$$- \iint_G w \nabla_i (\delta N^i + T^{ik}\,\delta\omega_k)\,d\sigma. \qquad (б$$

Из третьего уравнения системы (6) с учетом равенства (7
найдем

$$\delta N^i + T^{ik}\,\delta\omega_k = -b_{ik}\,\delta T^{ik} - \delta X^3 - \nabla_i(\omega_k \,\delta T^{ik}).$$

Принимая во внимание эти равенства, выражение (б) преобразуе
к виду

$$\iint_G (\omega_i \,\delta N^i + T^{ik}\omega_k \,\delta\omega_i)\,d\sigma = \int_{\Gamma_{(2)}} w(\delta N + T_n \,\delta\omega_n +$$

$$+ T_{n\tau}\,\delta\omega_\tau)\,ds + \iint_G w\left[b_{ik}\,\delta T^{ik} + \delta X^3 + \nabla_i(\omega_k \,\delta T^{ik})\right] d\sigma =$$

$$= \int_{\Gamma_{(2)}} \left[w(\delta N + T_n \,\delta\omega_n + T_{n\tau}\,\delta\omega_\tau)\,ds + w\,\omega_k \,\delta T^{ik} n_i\right] ds + \qquad (в$$

$$+ \iint_G \left[w(b_{ik}\,\delta T^{ik} + \delta X^3) - \nabla_k w \cdot \omega_i \,\delta T^{ik}\right] d\sigma =$$

$$= \int_{\Gamma_{(2)}} w\,\delta\Phi_m\,ds + \iint_G \left[w(b_{ik}\,\delta T^{ik} + \delta X^3) - \omega_i \omega_k \,\delta T^{ik}\right] d\sigma.$$

Внесем теперь полученные выражения (а),(в) в уравнение (13)
С учетом (11) оно примет вид

$$\delta P = \int_{\Gamma_{(1)}} \left[(\bar{\Phi}^s - \bar{\Phi})\,\delta\bar{v} + (\bar{G}^s - \bar{G})\,\delta\bar{\gamma}\right] ds + .$$

$$+ \int_{\Gamma_{(2)}} \left[(\bar{\gamma}^s - \bar{\gamma})\,\delta\bar{G} + (w^s - w)\,\delta\Phi_m + u_n^s \,\delta T_n + u_\tau^s \,\delta T_{n\tau}\right] ds +$$

$$+\iint_G (L^k \delta u_k + L^3 \delta w + L^{k+3} \delta \gamma_k + u_i \delta X^i) dG =$$
$$= \iint_G A_{ik} \delta T^{ik} dG, \tag{I4}$$

где

$$A_{ik} = \varepsilon_{ik} + b_{ik} w - \omega_i \omega_k / 2. \tag{I5}$$

Уравнению (I4) можно также придать несколько иную форму, выполнив с помощью (8) некоторые преобразования. При этом оно запишется в форме

$$\delta P = \int_{\Gamma_{(1)}} (\bar{\Phi}^s \delta \bar{v} + \bar{G}^s \delta \bar{\gamma}) ds + \int_{\Gamma_{(2)}} [(\bar{\gamma}^s - \bar{\gamma}) \delta \bar{G} +$$
$$+ (w^s - w) \delta \Phi_m + u_n^s \delta T_n + u_\tau^s \delta T_{n\tau}] ds +$$
$$+ \iint_G (\bar{X} \delta \bar{v} + \bar{M} \delta \bar{\gamma} - T^{ik} \delta \varepsilon_{ik} - M^{ik} \delta \varkappa_{ik} - 2N^i \delta \varepsilon_{i3} +$$
$$+ u_i \delta X^i) dG = \iint_G A_{ik} \delta T^{ik} dG. \tag{I6}$$

Покажем, что условие стационарности (I4) при $X^i = 0$ является вариационной формулировкой основных разрешающих уравнений и граничных условий теории пологих оболочек в смешанной форме.

Пусть $X^i_k = 0$. Тогда, как известно, первые два уравнения равновесия $L^k = 0$ удовлетворяются тождественно с помощью функции тангенциальных усилий ψ по формулам

$$T^{ik} = c^{ij} c^{ks} \nabla_j \nabla_s \psi. \tag{I7}$$

При этом, как показано К.З.Галимовым [3], поверхностный интеграл в правой части (I4) преобразуется к виду ($\psi_s = \nabla_s \psi$) :

$$\iint_G A_{ik} \delta T^{ik} dG = \iint_G A_{ik} c^{it} c^{ks} \nabla_t \delta \psi_s dG =$$
$$= \mathcal{J}_c + \iint_G c^{it} c^{ks} \nabla_s \nabla_t A_{ik} \delta \psi dG, \tag{I8}$$

где

$$\mathcal{J}_c = \int_{\Gamma_{(2)}} [(\varkappa A_n - \varkappa A_\tau - \frac{dA_\tau}{dn} + 2 \frac{dA_{n\tau}}{ds}) \delta \psi +$$

$$+ A_\tau \frac{d\delta\psi}{dn}\Big] ds - A_{n\tau}\,\delta\psi\Big|_{\Gamma(2)}, \tag{19}$$

$$A_n = A_{ik} n^i n^k, \quad A_\tau = A_{ik}\tau^i\tau^k, \quad A_{n\tau} = A_{ik} n^i \tau^k. \tag{20}$$

Для A_n, A_τ и $A_{n\tau}$ имеют место формулы [3]:

$$A_n = \varepsilon_n - k_n w - \omega_n^2/2, \qquad A_\tau = \varepsilon_\tau - k_\tau w - \omega_\tau^2/2,$$

$$A_{n\tau} = \varepsilon_{n\tau} - k_{n\tau} w - \omega_n\omega_\tau/2,$$

где $k_\tau = -b_{ik}\tau^i\tau^k$ – нормальная кривизна срединной поверхности в точках контура Γ оболочки в направлении $\bar\tau$, $k_n = -b_{ik} n^i n^k$ – такая же кривизна в направлении единичного вектора внешней геодезической нормали $\bar n$, $k_{n\tau} = -b_{ik}\tau^i n^k$ – геодезическое кручение контура Γ; ε_n, ε_τ, $\varepsilon_{n\tau}$ – контурные значения компонентов деформации, равные [3] ($\varkappa$ – геодезическая кривизна контура Γ)

$$\varepsilon_n = \frac{du_n}{dn} + k_n w + \frac{\omega_n^2}{2}, \quad \varepsilon_\tau = \frac{du_\tau}{ds} + \varkappa u_n + k_\tau w + \frac{\omega_\tau^2}{2},$$

$$2\varepsilon_{n\tau} = \frac{du_\tau}{dn} + \frac{du_n}{ds} - \varkappa u_\tau + 2k_{n\tau} w + \omega_n\omega_\tau, \tag{21}$$

причем

$$\varkappa = -\bar n \frac{d\bar\tau}{ds} = \bar\tau \frac{d\bar n}{ds} = n_i \tau^k \nabla_k \tau^i = \operatorname{div} \bar n,$$

$$\frac{df}{ds} = \tau^i \nabla_i f, \quad \frac{df}{dn} = n^i \nabla_i f, \quad \nabla_i f = \partial f/\partial\alpha^i,$$

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha^i} = \frac{\partial f}{dn} n^i + \frac{df}{ds}\tau^i.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае вариационное уравнение (I4) приводится к виду:

$$\int_{\Gamma(1)}\Big[(\Phi_n^s - T_n)\delta u_n + (\Phi_\tau^s - T_{n\tau})\delta u_\tau + (\Phi_m^s - \Phi_m)\delta w +$$

$$+ (G_n^s - G_n)\delta\gamma_n + (G_\tau^s - G_{n\tau})\delta\gamma_\tau\Big] ds + \int_{\Gamma(2)}\Big[(\gamma_n^s - \gamma_n)\delta G_n +$$

$$+ (\gamma_\tau^s - \gamma_\tau)\delta G_{n\tau} + (w^s - w)\delta\Phi_m + u_n^s \delta T_n + u_\tau^s \delta T_{n\tau}\Big] ds -$$

$$-\mathcal{J}_c + \iint\limits_{G}(L^3\delta w + L^{k+3}\delta\gamma_k - c^{it}c^{ks}\nabla_s\nabla_t A_{ik}\,\delta\psi)\,dG = 0, \qquad (22)$$

откуда следуют уравнения равновесия $L^3 = L^{k+3} = 0$ (k = I, 2), а также уравнения неразрывности деформаций в форме

$$L = c^{it}c^{ks}\nabla_s\nabla_t A_{ik} = 0, \qquad (23)$$

которое для изотропной однослойной оболочки с учетом зависимостей (15) и

$$\varepsilon_{ik} = B' P_{ikjs} T^{js} + a_{ik}\varepsilon_T,$$

$$(B' = 1/Eh, \quad P_{ikjs} = a_{ij}a_{ks} - \nu c_{ij}c_{ks})$$

после ряда преобразований может быть представлено в виде [8]:

$$L = -\frac{1}{Eh}\Delta\Delta\psi - \Delta\varepsilon_T + (2H^c a^{ts} - b^{ts})\varkappa_{st} +$$
$$+[(\varkappa_{12})^2 - \varkappa_{11}\varkappa_{22}]/a = 0. \qquad (24)$$

Здесь $H^c = a^{ik}b_{ik}/2 = b^i_i$ – средняя кривизна недеформированной срединной поверхности оболочки; $\Delta = \nabla^t\nabla_t$ – оператор Лапласса в общих координатах ($\nabla^t = a^{nt}\nabla_n$).

Из (22) кроме нетангенциальных следуют также тангенциальные граничные условия, формулируемые в рассматриваемом случае в функциях w и ψ. Не останавливаясь на этом вопросе, отметим, что в нелинейной теории оболочек формулировка этих условий детально изучена К.З.Галимовым [3], а в работе [7] выявлены возможности их некоторого упрощения.

Кроме того, укажем, что при использовании кинематических гипотез $2\varepsilon_{i3} = 0$ ($\gamma_i = -\omega_i = -\nabla_i w$) из (22) может быть получена вариационная формула Н.А.Алумяэ [2, 3], соответствующая основным разрешающим уравнениям нелинейной теории пологих оболочек Кирхгофа-Лява, нашедшая широкое применение для приближенного решения различных задач статики и устойчивости.

Литература

I. Рейсснер Е. О некоторых вариационных теоремах теории упругости. – В кн.: Проблемы механики сплошной среды (к 70-летию академика Н.И.Мусхелишвили). М.: Изд-во АН СССР, 1961, с.251-267.

2. Алумяэ Н.А. Одна вариационная формула для исследования тонкостенных оболочек в послеэлектрической стадии. - ПММ, 1950, т. 14, № 2, с. 271-280.

3. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1975, - 325 с.

4. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наукова думка, 1973, - 248 с.

5. Айнола Л.Я. Вариационные методы для нелинейных уравнений движения оболочек. - ПММ, 1968, т. 32, № 1, с. 154-158.

6. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Коллективная монография. Научн. редактор К.З.Галимов. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. - 211 с.

7. Галимов К.З., Паймушин В.Н. Об одной вариационной формуле смешанного типа нелинейной теории пологих оболочек. - В кн.: Вопросы расчета прочности конструкции летательных аппаратов. Межвузовский сб. - Казань, КАИ, вып. 2, 1979, с. 21-36.

8. Галимов К.З., Корнишин М.С., Паймушин В.Н. О некоторых соотношениях теории среднего изгиба пологих оболочек сложной геометрии. - В кн.: Прочность и надежность сложных систем. - Киев: Наукова думка, 1979, с. 26-33.