

УДК 678.5:539.2+539.4

Г.П.Зайцев

РАЗРУШЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ОРТОТРОПНОГО АРМИРОВАННОГО ПЛАСТИКА
 С ТРЕЩИНОЙ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ И ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИЯХ

В большинстве случаев армированный пластик, применяемый для производства ответственных изделий, представляется как ортотропный материал [1]. При этом существуют критерии для экспериментального обоснования его ортотропности [2].

При нагружении изделий из армированных пластиков с трещиной не наблюдается мгновенного его разрушения, которое должно было бы наблюдаться вследствие бесконечной величины напряжений у кончика трещины, исходя из решения задачи о распределении напряжений в рассматриваемой ортотропной пластине с трещиной [3].

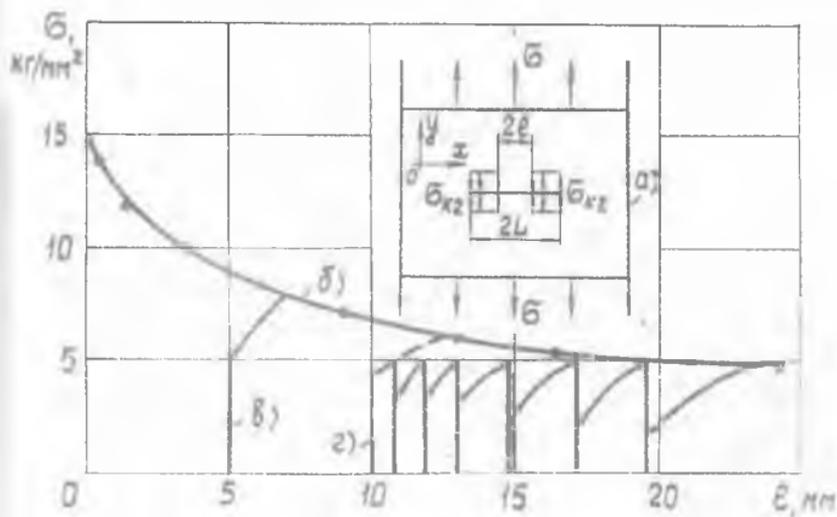


Рис. 1

Для лучшего приближения к реальным условиям распределения напряжений и сопротивления армированного пластика в зоне трещины механическому нагружению дефект-трещину можно представить как разрез, берега которого имеют два характерных участка. Один участок будет с невзаимодействующими берегами, а второй участок с взаимодействующими берегами [4], рис. 1а. Такая модель для изотропных тел с трещинами была предложена Панаском В.В. [5].

Трещина подобного типа в ортотропном элементе начнет распространяться в том случае, если работа, затраченная на раскрытие трещины, будет равна энергии образования трещины.

В статье рассматривается растяжение плоского элемента из ортотропного материала с центральной трещиной, описанной выше. Линия трещины совпадает с осью x , являющейся первой главной осью анизотропии, а растяжение осуществляется перпендикулярно к длине трещины в направлении второй главной оси анизотропии. Требуется определить предельное напряжение для такого элемента при однократном растяжении или число циклов до разрушения элемента при заданном уровне максимального напряжения σ и длины участка трещины l .

На основе симметрии задачи будем рассматривать трещину как разрез вдоль оси x , при этом на участке $l \leq x \leq L$ противоположные берега притягиваются с напряжением σ_{κ_2} . Параметр l задан, параметр L общей длины трещины определяется в ходе решения задачи, на поверхности рассматриваемой упругой области действуют напряжения:

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad \sigma_y(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leq l \\ \sigma_{\kappa_2} & \text{при } l < |x| \leq L, \end{cases} \quad (I)$$

в бесконечно удаленных точках плоскости $\sigma_y(x, \infty) = \sigma$. Используя метод Бюкнера [6], из напряженного состояния, возникающего в упругой плоскости с разрезом L , с использованием предыдущих граничных условий вычтем однородное напряженное состояние $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ и $\sigma_y(x, 0) = \sigma$, тогда получим некоторое дополняющее напряженное состояние, исчезающее на бесконечности. На поверхности данного разреза напряженное состояние определяется граничными условиями:

$$p(x) = \begin{cases} \sigma & \text{при } |x| \leq l \\ \sigma - \sigma_{\kappa_2} & \text{при } l < |x| \leq L, \end{cases} \quad (2)$$

где $p(x) = -\sigma_y(x, 0)$ - нормальное давление на поверхностях разреза для вспомогательной задачи.

Однородное напряженное состояние не зависит от размеров трещины, и поэтому определяющим в данной задаче является вспомогательное напряженное состояние, которое дает возможность оценить предельное состояние тела с трещиной. Принимая во внимание начальную формулировку, необходимо определить вертикальные смещения $v(x, 0)$ при $x \leq L$ и напряжения $\sigma_y(x, 0)$ при $x \geq L$ для рассматриваемой пластины с трещиной, когда на контуре трещины заданы граничные условия (I). Для удобства решения данную задачу разобьем на две, используя условия аддитивности напряжений и деформаций при нагружении в условиях идеальной упругости, тогда для каждой задачи имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{а) } \tau_{xy} &= 0 & p(x) &= \sigma - \sigma_{k2} \quad \text{при } -L \leq x \leq L \\ \text{б) } \tau_{xy} &= 0 & p(x) &= \begin{cases} \sigma_{k2} & \text{при } -l \leq x \leq l \\ 0 & \text{при } -l < |x| \leq L \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

Используя основные положения теории аффинного преобразования, теории функции комплексного переменного для нахождения функций, конформно отображающей различные эллиптические области на внутренность единичного круга, заданные граничные условия, соответствующие интегральные выражения Шварца-Кристоффеля и интегралы Коши в области комплексных переменных, а также предельные переходы, можно получить для задачи а):

$$\begin{aligned} \psi(z_1) &= \frac{\sigma - \sigma_{k2}}{2(S_1 - S_2)} (z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}) S_2 \\ \psi(z_2) &= -\frac{\sigma - \sigma_{k2}}{2(S_1 - S_2)} (z_2 - \sqrt{z_2^2 - L^2}) S_1 \end{aligned} \quad (4)$$

для задачи б):

$$\begin{aligned} \psi(z_1) &= -\frac{\sigma_{k2} \cdot L \cdot L \cdot S_2}{2\pi(S_1 - S_2)} \left\{ \delta_2 - \delta_1 - \delta_4 + \delta_3 + \frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_4} - \frac{1}{\delta_3} + \right. \\ &\quad \left. 2 \left(\frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}}{L} + \frac{L}{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}} - \delta_1 - \frac{1}{\delta_1} \right) \ln \frac{\delta_2 - \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}}{L}}{\delta_1 - \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}}{L}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left(\delta_1 + \frac{1}{\delta_3} - \frac{2L}{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}} \right) \ln \frac{\delta_2}{\delta_1} + \left(\delta_2 + \frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\delta_1} - \delta_1 \right) \cdot \\
 & \cdot \left(2 \ln \frac{\delta_3 - \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}}{L}}{\delta_2 - \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}}{L}} - \ln \frac{\delta_3}{\delta_2} \right) + \left(\delta_2 - \delta_1 - \delta_3 + \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}}{L} \right) \cdot \\
 & \cdot \left(\frac{1}{\delta_4} - \frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta_3} + \frac{L}{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}} \right) 2 \ln \frac{\delta_4 - \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}}{L}}{\delta_3 - \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}}{L}} - (\delta_2 - \delta_1 - \delta_3 + \\
 & \cdot \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}}{L} - \frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta_3} - \frac{2L}{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}}) \ln \frac{\delta_4}{\delta_3} + (\delta_4 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_1 \cdot \frac{1}{\delta_4} + \frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\delta_3} - \\
 & - \frac{1}{\delta_1}) \left(2 \ln \frac{\delta_4 - \frac{\sqrt{z_1^2 - L^2}}{L}}{\delta_4 - \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - L^2}}{L}} - \ln \frac{\delta_1}{\delta_4} \right) \}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

$\varphi(z_2)$ получается из $\varphi(z_1)$ заменой S_1 на S_2 , S_2 на S_1 и z_1 на z_2 , где L - мнимая единица; $z_1 = x + S_1 \cdot y$; $z_2 = x + S_2 \cdot y$
 S_1 и S_2 - параметры упругости, определяемые из уравнения

$$S^4 + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12} \right) S^2 + \frac{E_1}{E_2} = 0; \quad (6)$$

E_1 - модуль упругости в направлении первой главной оси анизотропии;

E_2 - модуль упругости в направлении второй главной оси анизотропии;

G_{12} - модуль сдвига в плоскости 12;

ν_{12} - коэффициент Пуассона, характеризующий изменение расстояний в направлении 2 при растяжении в направлении 1.

Величины δ_1 , δ_2 , δ_3 и δ_4 , характеризующие границы действия нормального давления, действующего на контуре трещины, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \frac{1 + i\sqrt{L^2 - e^2}}{L}, & \delta_2 &= \frac{-1 - i\sqrt{L^2 - e^2}}{L} \\
 \delta_3 &= \frac{-1 + i\sqrt{L^2 - e^2}}{L}, & \delta_4 &= \frac{1 - i\sqrt{L^2 - e^2}}{L}
 \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения напряжений σ_y и перемещений v_y , на основе функций $\psi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ применим уравнения [3]:

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re} [\psi'(z_1) + \psi'(z_2)], \quad (8)$$

$$v_y = 2 \operatorname{Re} [q_1 \psi(z_1) + q_2 \psi(z_2)],$$

$$q_1 = \frac{\nu_{12}}{E_1} S_1 + \frac{1}{E_2 S_1}, \quad q_2 = \frac{\nu_{12}}{E_1} S_2 + \frac{1}{E_2 S_2}. \quad (9)$$

Используя выражения (7), (4), (5), (6) и (7), а также закон аддитивности напряжений, можно найти нормальное напряжение, перпендикулярное к линии трещины, в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_y = & \frac{1}{\sqrt{x^2 - L^2}} \{ (\sigma - \sigma_{к2}) (x - \sqrt{x^2 - L^2}) + \\ & + \frac{\sigma_{к2}}{\pi} (\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{L^2 - \rho^2}}{\rho}) (x + \sqrt{x^2 - L^2}) - \\ & - \frac{2\sigma_{к2}}{\pi} \sqrt{x^2 - L^2} (\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{L^2 - \rho^2}}{\rho \cdot x + \sqrt{x^2 - L^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{L^2 - \rho^2}}{\rho \cdot x - \sqrt{x^2 - L^2}}) \}. \quad (10) \end{aligned}$$

Из данного выражения следует, что при $x \rightarrow L$, $\sigma_y \rightarrow \infty$, что физически не обосновано. Следовательно, полагаем, что $\sigma_y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow L$, тогда выражение в фигурных скобках уравнения должно равняться нулю. Применяя последнее допущение и осуществляя предельный переход, имеем

$$\sigma - \frac{2\sigma_{к2}}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{L^2 - \rho^2}}{\rho} = 0. \quad (11)$$

Из последнего уравнения можно найти связь L и ρ , она будет следующей:

$$L = \rho \operatorname{sec} \frac{\pi \sigma}{2\sigma_{к2}} \quad (12)$$

Перемещение в направлении оси y , т.е. перпендикулярно линии трещины, определяем из уравнений (9), (4), (5), (6) и (7) для анизотропной пластины, при этом используем закон аддитивности:

$$\begin{aligned}
 v_y^+ &= \frac{1}{E_2} \left\{ \frac{\sigma_{k2}}{\pi} \operatorname{Re} \left[(x-l) \ln \frac{\delta_2 - \frac{x-i\sqrt{L^2-x^2}}{L}}{\delta_1 - \frac{x-i\sqrt{L^2-x^2}}{L}} \right] - \right. \\
 &- (x+i\sqrt{L^2-x^2}-l) \ln \frac{\delta_2}{\delta_1} - l (2 \ln \frac{\delta_2 - \frac{x-l\sqrt{L^2-x^2}}{L}}{\delta_1 - \frac{x-l\sqrt{L^2-x^2}}{L}} - \\
 &- \ln \frac{\delta_2}{\delta_1}) + (x-l) \ln \frac{\delta_2 - \frac{x-i\sqrt{L^2-x^2}}{L}}{\delta_1 - \frac{x-i\sqrt{L^2-x^2}}{L}} \left. \right] \left[L \frac{S_1 - S_2}{S_1 - S_2} \right] + \\
 &+ (\sigma - \sigma_{k2}) \sqrt{L^2 - x^2} \operatorname{Re} \left[L \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} \right] \quad (13)
 \end{aligned}$$

Вследствие того, что $v_y^+ = 0$ при $x = L$, а также $(v_y^+)'_x = 0$ при $x = L$ (последнее следует из равенства напряжений 0 в точке $x = L$), можно сделать вывод, что противоположные берега реальной равновесной трещины смыкаются плавно, т.е. касательная к обоим берегам в точке $x = L$ и $x = -L$ будет одной и той же.

Полагаем, что в условиях статического и циклического нагружения плотность поверхностной энергии разрушения γ_2 будет постоянной, а разрушение будет идти вдоль линии трещины. На основании равенства работы раскрытия трещины и энергии образования трещины в зоне ее устья можно записать:

$$\gamma_2 = \int_0^L \sigma_y \frac{[v_y(x, l + \Delta l, \theta + \Delta \theta) - v(x, l, \theta)]}{\Delta l} dx, \quad (14)$$

где $\theta = \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_{k2}}$; σ_{k2} - предел прочности в направлении оси y .
 Раскладывая функцию в квадратных скобках уравнения (14) в ряд Тейлора по Δl и устремляя $\Delta l \rightarrow 0$, получаем

$$\gamma_2 = \sigma_{k2} \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial l} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dl} \right) dx. \quad (15)$$

Подставляя выражение v_y (13) в интеграл (15) и произведя необходимые действия, будем иметь:

$$\gamma_2 = \frac{\sigma_{k2}^2 l}{\pi E_2} \operatorname{Re} \left[l \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} \right] \left[2(\ln \cos \theta + \theta \operatorname{tg} \theta) + l (\theta \operatorname{sec}^2 \theta - \operatorname{tg} \theta) \frac{d\theta}{dl} \right]. \quad (16)$$

Из последнего уравнения (16) следует:

$$\frac{d\sigma}{d\ell} = \frac{4\sigma_{K2}}{\pi} \frac{\left(\frac{\gamma_2 \pi E_2}{\sigma_{K2} \operatorname{Re} [i \frac{S_1 - S_2}{S_1 S_2}]} - \ell \ln \cos \frac{\pi \sigma}{2\sigma_{K2}} - \frac{\ell \pi}{2\sigma_{K2}} \operatorname{tg} \frac{\pi \sigma}{2\sigma_{K2}} \right)}{\rho^2 \left(\frac{\pi \sigma}{2\sigma_{K2}} \operatorname{sec}^2 \frac{\pi \sigma}{2\sigma_{K2}} - \operatorname{tg} \frac{\pi \sigma}{2\sigma_{K2}} \right)} \quad (I7)$$

Интегрируя уравнение (I7) численными методами, получаем кривую зависимости $\sigma - \ell$, рис. Iв. Кривую критических напряжений (рис. Iб) можно представить в виде

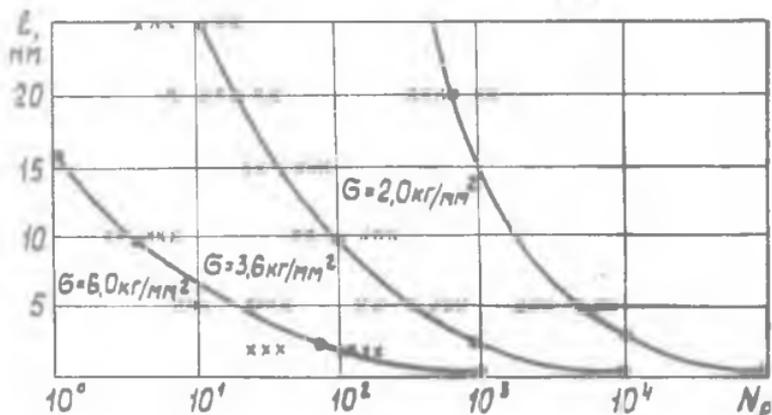
$$\ell = \frac{\ell \cdot \sigma_{K2}^2 \operatorname{Re} [i \frac{S_1 - S_2}{S_1 S_2}]}{\gamma_2 \pi E_2} \left(\ln \cos \frac{\pi \sigma}{2\sigma_{K2}} + \frac{\sigma \pi}{2\sigma_{K2}} \operatorname{tg} \frac{\pi \sigma}{2\sigma_{K2}} \right). \quad (I8)$$

Пересечение кривой $\sigma - \ell$ с кривой критических напряжений определяет предельную величину напряжения при однократном нагружении (рис. Iв).

В условиях циклического нагружения при заданном σ_{\max} в течение каждого цикла длина трещины возрастает на некоторую величину, число циклов до разрушения устанавливается в тот момент расчета, когда кривая $\sigma - \ell$ на определенном цикле коснется кривой критических напряжений (рис. Iг).

Экспериментальные данные в условиях однократного и циклического нагружения (рис. 2) получены при испытании элементов из стеклопластика на основе ткани сатинового переплетения и силиконовом связующем ЭД-6. Физико-механические характеристики этого стеклопластика следующие:

$$E_1 = 2600 \text{ кг/мм}^2; \quad E_2 = 1600 \text{ кг/мм}^2; \quad G_{12} = 460 \text{ кг/мм}^2; \\ \nu_{12} = 0,26; \quad \sigma_{K2} = 15 \text{ кг/мм}^2; \quad \delta_2 = 0,64 \text{ кг/мм}.$$



Вывод

Предложена единая зависимость, описывающая разрушение при статическом однократном и циклическом нагружении элементов из армированных пластиков с центральной трещиной, теоретическая зависимость механики разрушения удовлетворительно описывает экспериментальные данные.

Л и т е р а т у р а

1. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига, "Зинатне", 1972.

2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. ГИИТЛ, 1950.

3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, "Наукова думка", 1968.

4. Серенсен С.В., Зайцев Г.П. Предельное состояние ортотропной пластины с центральной трещиной в силовой постановке. Сборник тезисов докладов I Всесоюзной научно-технической конференции "Проблемы механики конструкций из композиционных материалов". Челябинск, 1975.

5. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, "Наукова думка", 1968.

6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., "Наука", 1966.