

сложной формы и об одном методе их численного решения. - В междуу. сб.: Вопросы расчета прочности конструкции летательных аппаратов, вып. 2, Казань, КАИ, 1979, с. 67-75.

6. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы - аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики. - ИВУЗ, Авиационная техника, 1966, № 3, с. 50-61.

7. Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Снигирев В.Ф. Расчет крыльевых устройств судов на прочность. - Казань: Таткнигоиздат, 1975. - 212 с.

8. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. - Киев: Наукова думка, 1973. - 228 с.

9. D'Silva E. Bending of perforated plates. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Ser. E.*, 1962, v. 29, № 4, 749-750.

УДК 629.7.015.4:539.3

Б.А.Коновалов, Е.А.Пеньков

РАСЧЕТ СКОШЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОБОБЩЕННЫХ ПОГОННЫХ И СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ НАГРУЗОК

Особенность работы скошенных оболочек состоит в том, что вследствие косо́го закрепления поперечные нагрузки вызывают как изгиб, так и кручение конструкции, иначе, в таких оболочках изгиб не отделяется от кручения. Определение напряженно-деформированного состояния в скошенных или стреловидных оболочках, нагруженных обобщенными погонными и сосредоточенными поперечными нагрузками, является целью настоящего исследования. Задача состоит в том, чтобы получить алгоритмы для напряжений и перемещений в стреловидном кессонном крыле самолета.

Исследования проводятся на основе обобщенного метода перемещений академика Образцова И.Ф. /1, 2, 3/ с использованием пространственных функций депланации и точечных граничных условий в сечении косо́й заделки.

Продольное $u(x, s)$ и поперечное $v(x, s)$ перемещения точек

оболочки представляются в виде конечных разложений

$$u(z, s) = \sum_i U_i(z) \cdot \varphi_i(s) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$v(z, s) = \sum_k V_k(z) \cdot \psi_k(s) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (I)$$

где $U_i(z)$, $V_k(z)$ - искомые обобщенные продольные и поперечные перемещения; $\varphi_i(s)$, $\psi_k(s)$ - функции изменения обобщенных продольных и поперечных перемещений по контуру поперечного сечения оболочки, подлежащие предварительному выбору в соответствии с физическим смыслом рассматриваемой задачи.

Для расчета конических оболочек (рис. 1) в перемещениях в работе /4/ получена система разрешающих дифференциальных уравнений равновесия, которая имеет вид

$$\gamma \sum_i a_{ij} \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{z}{\ell} \right)^{\alpha+\lambda+1} \cdot U_i' \right] - \sum_i \left(\frac{z}{\ell} \right)^{\alpha+\lambda-1} \cdot b_{ij} U_i - \sum_k \left(\frac{z}{\ell} \right)^{\beta+\lambda} \cdot c_{kj} V_k' + \left(\frac{z}{\ell} \right)^{\lambda+1} \cdot \frac{1}{G} p_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

$$\sum_i c_{ih} \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{z}{\ell} \right)^{\alpha+\lambda} \cdot U_i \right] + \sum_k \tau_{kh} \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{z}{\ell} \right)^{\beta+\lambda+1} \cdot V_k' \right] - \gamma \sum_k \left(\frac{z}{\ell} \right)^{\beta+\lambda-3} \cdot s_{kh} V_k + \left(\frac{z}{\ell} \right)^{\lambda+1} \cdot \frac{1}{G} q_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

где

$$\gamma = \frac{E}{G}$$

$$a_{ij} = \oint_{(s)} \varphi_i(s) \varphi_j(s) \delta ds + \sum_{\xi} \varphi_i(s) \varphi_j(s) \Delta F_{\xi};$$

$$b_{ij} = \oint_{(s)} \varphi_i'(s) \varphi_j'(s) \delta ds; \quad c_{ih} = \oint_{(s)} \varphi_i'(s) \psi_h(s) \delta ds;$$

$$c_{kj} = \oint_{(s)} \psi_k(s) \varphi_j'(s) \delta ds; \quad \tau_{kh} = \oint_{(s)} \psi_k(s) \psi_h(s) \delta ds;$$

$$s_{kh} = \frac{1}{E} \oint_{(s)} \frac{M_k(s) M_h(s) ds}{EJ}. \quad (3)$$

Интегралы (3) вычисляются по произвольно выбранному фиксированному сечению $z = \ell$, а сумма распространяется на все сосредоточенные продольные элементы в нем (каждый в точке $s = s_{\xi}$), площади поперечных сечений которых равны ΔF_{ξ} .

Элементарный изгиб конического кессона с недеформируемым контуром для заданных по линейному закону нагрузок $q(z)$, приведенных на рис. 2, при двух степенях свободы ($m = 1, n = 1$)

$$\varphi_1(s) = y(s), \quad \psi_1(s) = y'(s)$$

дает для искомых функций следующие выражения:

$$U_1(z) = -N \left\{ c_1 \left(\frac{z}{\ell} \right)^{-1} + c_2 \left(\frac{z}{\ell} \right)^{-2} + c_3 + \frac{q_0 \ell^2}{12 F_1 G (\ell - b)} \left[\left(\frac{z}{\ell} \right)^{+1} - 3 \frac{b}{\ell} \ln \frac{z}{\ell} \right] \right\},$$

$$V_1(z) = \ell \left\{ (1+N) c_1 \ln \frac{z}{\ell} - N c_2 \left(\frac{z}{\ell} \right)^{-1} + N c_3 \left(\frac{z}{\ell} \right)^{+1} + c_4 - \frac{q_0 \ell^2 (3-N)}{24 F_1 G (\ell - b)} \left(\frac{z}{\ell} \right)^{+2} - \right.$$

$$- \frac{q_0 \ell b}{4F_1 G (\ell - b)} \left(\frac{z}{\ell}\right)^{+1} [N(\ln \frac{z}{\ell} - 1) - 2] \}, \quad (4)$$

где $N = \frac{2F_1 \ell^2}{y y_x}$, $y_x = d_1^2 \left(\frac{F_1}{G} + \frac{F_2}{2} + \Delta F\right)$, $F_1 = \delta_1 d_1$, $F_2 = \delta_2 d_2$. (5)

При стесненном кручении олабокнического призматического кессона с жестким контуром моментом $\mathcal{M}(z)$, изменяющимся по линейному закону (рис. 2), и двух степенях свободы ($m = I, n = I$)

$$\varphi_2(S) = x(S)y(S), \quad \psi_2(S) = h(S),$$

где $h(S)$ - расстояние от начала координат до соответствующей стенки оболочки, интегралы искоемых функций обобщенных перемещений в соответствии с /4/ записываются в виде

$$U_2(z) = C_5 \left(\frac{z}{\ell}\right)^{-3} + C_6 \left(\frac{z}{\ell}\right)^{-(2+\sqrt{4+k^2})} + C_7 \left(\frac{z}{\ell}\right)^{-2+\sqrt{4+k^2}} +$$

$$+ \frac{\mathcal{M}_0 \ell^4 b_2}{(\ell - \lambda) a b_1} \left[\frac{1}{2(3+k^2)} \left(\frac{z}{\ell}\right)^{-1} - \frac{1}{4+k^2} \frac{\lambda}{\ell} \left(\frac{z}{\ell}\right)^{-2} \right],$$

$$V_2(z) = \ell \left\{ \frac{3a + b_1 \ell^2}{2b_2 \ell^2} C_5 \left(\frac{z}{\ell}\right)^{-2} + \frac{b_2}{b_1(1+\sqrt{4+k^2})} C_6 \left(\frac{z}{\ell}\right)^{-(1+\sqrt{4+k^2})} + \right.$$

$$+ \frac{b_2}{b_1(1-\sqrt{4+k^2})} C_7 \left(\frac{z}{\ell}\right)^{-1+\sqrt{4+k^2}} + C_8 +$$

$$\left. + \frac{\mathcal{M}_0 \ell^2}{(\ell - \lambda) a b_1} \left[- \frac{3a + b_1 \ell^2}{2(3+k^2)} \ln \frac{z}{\ell} - \frac{4a + b_1 \ell^2}{4+k^2} \frac{\lambda}{\ell} \left(\frac{z}{\ell}\right)^{-1} \right] \right\}, \quad (6)$$

где

$$a = E y_\varphi = \frac{1}{24} E d_1^2 d_2^2 (F_1 + F_2 + 6 \Delta F),$$

$$b_1 = G b_{22} = G \gamma_{22} = \frac{1}{2} G (d_2^2 F_1 + d_1^2 F_2),$$

$$b_2 = G c_{22} = \frac{1}{2} G (d_2^2 F_1 - d_1^2 F_2), \quad k^2 = \frac{b_1^2 - b_2^2}{a b_1} \ell^2. \quad (7)$$

В настоящей статье рассматривается стреловидный кессон с недеформируемым контуром, жестко заделанный в косом широком торцовом сечении, к которому помимо распределенных нагрузок $q(z)$ и $\mathcal{M}(z)$ приложены поперечная сила Q_0 , изгибающий M_0 и крутящий H_0 моменты в узком торцовом сечении (рис. 2).

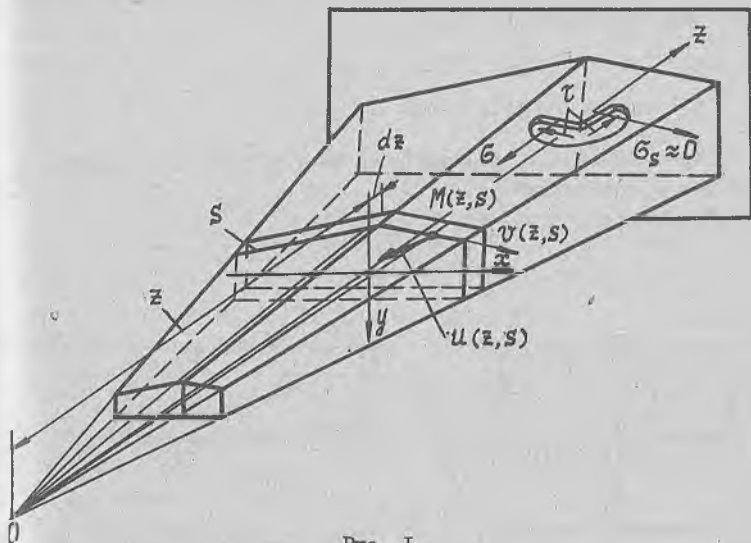


Рис. I

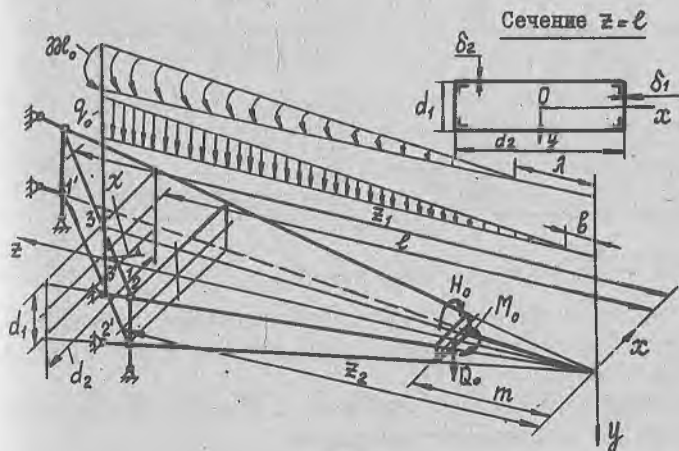


Рис. 2

Продольные и поперечные перемещения оболочки представляются в виде следующих конечных рядов:

$$u(z, s) = U_1(z) \cdot \varphi_1(s) + U_2(z) \cdot \varphi_2(s),$$

$$v(z, s) = V_1(z) \cdot \varphi_1(s) + V_2(z) \cdot \varphi_2(s).$$

(8)

Графики выбираемых функций приведены на рис. 3 и удовлетворяют условию ортогональности

$$\alpha_{12}(z) = \oint_{(s)} \varphi_1(s) \varphi_2(s) \delta s + \sum_2 \varphi_1(s_\xi) \varphi_2(s_\xi) \cdot \Delta F_\xi = 0$$

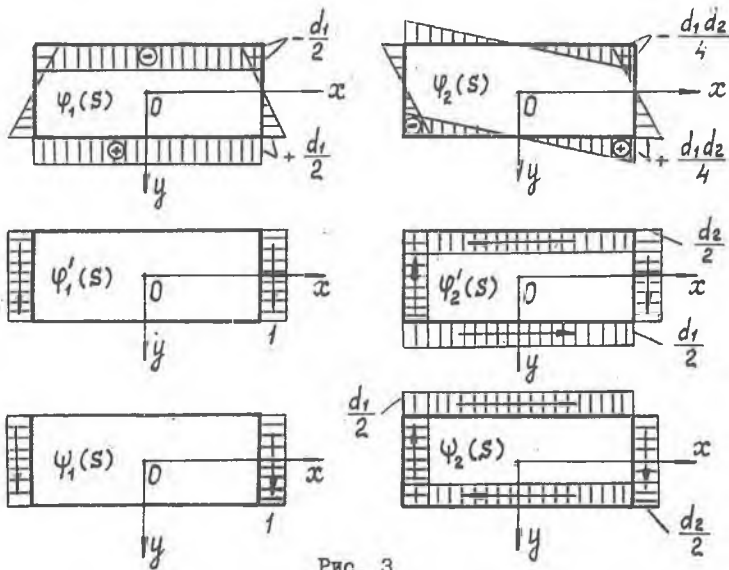


Рис. 3

В этом случае система четырех дифференциальных распадается на две независимых системы, и для $U_1(z)$, $U_2(z)$, $V_1(z)$ и $V_2(z)$ справедливы выражения (4) и (6).

Нормальные и касательные напряжения в стреловидном крыле при перемещениях (8) определяются выражениями

$$\sigma = E [U_1'(z) \varphi_1(s) + U_2'(z) \varphi_2(s)].$$

$$\tau(z, s) = G [U_1(z) \varphi_1'(s) + U_2(z) \varphi_2'(s) + V_1'(z) \varphi_1(s) + V_2'(z) \varphi_2(s)]. \quad (9)$$

Постоянные интегрирования ($C_1 \dots C_8$) определяются из граничных условий в торцовых сечениях. На свободном торце ($z=m$) имеют место статические граничные условия

$$\begin{aligned} \int_{(s)} \tau(z, s) \cdot \psi_1(s) \delta ds + Q_0 &= 0, \\ \int_{(s)} \sigma(z, s) \cdot \psi_1(s) \delta ds + M_0 &= 0, \\ \int_{(s)} \sigma(z, s) \cdot \psi_2(s) \delta ds &= 0, \\ \int_{(s)} \tau(z, s) \cdot \psi_2(s) \delta ds + H_0 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В сечении косої заделки должны быть удовлетворены геометрические граничные условия. Так как скошенная оболочка в рассматриваемом случае обладает двумя степенями свободы в продольном направлении и двумя в поперечном, то следует наложить такие связи, которые ликвидировали бы эти перемещения. С этой целью вводятся абсолютно жесткие опорные стержни (рис. 2) в точках 1 и 2, например, верхней панели (или соответственно в точках 1' и 2' нижней панели) от продольных перемещений и по прямым 1-1', 2-2' от поперечных перемещений в плоскости сечения косої заделки. Математические граничные условия, соответствующие введенным опорным связям, записываются так:

$$\begin{aligned} u(z, s) = U_1(z) \psi_1(s) + U_2(z) \psi_2(s) &= 0 \quad (\text{при } z = z_1 \text{ и } s = S_1), \\ u(z, s) = U_1(z) \psi_1(s) + U_2(z) \psi_2(s) &= 0 \quad (\text{при } z = z_2 \text{ и } s = S_2), \\ v(z, s) = V_1(z) \psi_1(s) + V_2(z) \psi_2(s) &= 0 \quad (\text{при } z = z_1 \text{ и } s = S_{1-1'}), \\ v(z, s) = V_1(z) \psi_1(s) + V_2(z) \psi_2(s) &= 0 \quad (\text{при } z = z_2 \text{ и } s = S_{2-2'}). \end{aligned} \quad (11)$$

Из граничных условий для постоянных интегрирования $C_1 \dots C_8$ получается система линейных алгебраических уравнений

$$\alpha C = A, \quad (12)$$

где $C [C_1, C_2 \dots C_8]^T$ - вектор постоянных интегрирования,

$A [A_1, A_2 \dots A_8]^T$ - вектор правых частей,

$\alpha = [\alpha_{ij}]$ - квадратная матрица восьмого порядка.

Элементы матрицы α определяются по формулам

$$\alpha_{11} = 2F_1 G; \quad \alpha_{21} = \left(\frac{m}{\rho}\right)^{+1}; \quad \alpha_{22} = 2; \quad \alpha_{35} = 3;$$

$$\alpha_{36} = \left(\frac{m}{\rho}\right)^{+1 - \sqrt{4+K^2}} \cdot (2 + \sqrt{4+K^2}); \quad \alpha_{47} = \left(\frac{m}{\rho}\right)^{+1 + \sqrt{4+K^2}} \cdot (2 - \sqrt{4+K^2});$$

$$\alpha_{45} = \frac{a b_1 (3+k^2)}{b_2 \ell^2}; \quad \alpha_{51} = \alpha_{72} = -\left(\frac{z_1}{\ell}\right)^{-1} \cdot N; \quad \alpha_{52} = -\left(\frac{z_1}{\ell}\right)^{-2} \cdot N;$$

$$\alpha_{53} = \alpha_{63} = -N, \quad \alpha_{55} = \left(\frac{z_1}{\ell}\right)^{-3} \frac{d_2(z_1)}{2}; \quad \alpha_{56} = \left(\frac{z_1}{\ell}\right)^{-(2+\sqrt{4+k^2})} \frac{d_2(z_1)}{2};$$

$$\alpha_{57} = \left(\frac{z_1}{\ell}\right)^{-2+\sqrt{4+k^2}} \frac{d_2(z_1)}{2}; \quad \alpha_{61} = \alpha_{82} = -\left(\frac{z_2}{\ell}\right)^{-1} \cdot N; \quad \alpha_{62} = -\left(\frac{z_2}{\ell}\right)^{-2} \cdot N;$$

$$\alpha_{65} = -\left(\frac{z_2}{\ell}\right)^{-3} \frac{d_2(z_2)}{2}; \quad \alpha_{66} = -\left(\frac{z_2}{\ell}\right)^{-(2+\sqrt{4+k^2})} \frac{d_2(z_2)}{2};$$

$$\alpha_{67} = -\left(\frac{z_2}{\ell}\right)^{-2+\sqrt{4+k^2}} \frac{d_2(z_2)}{2}; \quad \alpha_{71} = (1+N) \ln \frac{z_1}{\ell}; \quad \alpha_{73} = \left(\frac{z_1}{\ell}\right)^{-1} \cdot N;$$

$$\alpha_{74} = \alpha_{84} = 1; \quad \alpha_{75} = \left(\frac{z_1}{\ell}\right)^{-2} \frac{3a + b_1 \ell^2}{4b_2 \ell^2} d_2(z_1);$$

$$\alpha_{76} = \left(\frac{z_1}{\ell}\right)^{-(1+\sqrt{4+k^2})} \frac{b_2 \cdot d_2(z_1)}{2b_1(1+\sqrt{4+k^2})}; \quad \alpha_{77} = \left(\frac{z_1}{\ell}\right)^{-1+\sqrt{4+k^2}} \frac{b_2 \cdot d_2(z_1)}{2b_1(1-\sqrt{4+k^2})};$$

$$\alpha_{78} = \frac{d_2(z_1)}{2}; \quad \alpha_{81} = (1+N) \ln \frac{z_2}{\ell}; \quad \alpha_{83} = \left(\frac{z_2}{\ell}\right)^{-1} \cdot N;$$

$$\alpha_{85} = -\left(\frac{z_2}{\ell}\right)^{-2} \frac{3a + b_1 \ell^2}{4b_2 \ell^2} d_2(z_2); \quad \alpha_{86} = -\left(\frac{z_2}{\ell}\right)^{-(1+\sqrt{4+k^2})} \frac{b_2 \cdot d_2(z_2)}{2b_1(1+\sqrt{4+k^2})};$$

$$\alpha_{87} = -\left(\frac{z_2}{\ell}\right)^{-1+\sqrt{4+k^2}} \frac{b_2 \cdot d_2(z_2)}{2b_1(1-\sqrt{4+k^2})}; \quad \alpha_{88} = -\frac{d_2(z_2)}{2}.$$

Остальные элементы матрицы α равны нулю. Для элементов вектора A имеем

$$A_1 = -Q_0 + \frac{q_0 \ell^2}{2(\ell-b)} \left[\left(\frac{m}{\ell}\right)^{+2} - 2 \frac{b}{\ell} \left(\frac{m}{\ell}\right)^{+1} \right];$$

$$A_2 = -\frac{M_0 \ell}{E J_x N} + \frac{q_0 \ell^2}{12 F_1 G (\ell-b)} \left[\left(\frac{m}{\ell}\right)^{+3} - 3 \frac{b}{\ell} \left(\frac{m}{\ell}\right)^{+2} \right];$$

$$A_3 = \frac{\pi e_0 \ell^4 b_2}{(\ell-\lambda) a b_1} \left[\frac{1}{2(3+k^2)} \left(\frac{m}{\ell}\right)^{+2} - \frac{2}{4+k^2} \frac{\lambda}{\ell} \left(\frac{m}{\ell}\right)^{+1} \right];$$

$$A_4 = H_0 - \frac{\pi e_0 \ell^2}{2(\ell - \lambda)} \left[\left(\frac{m}{\ell} \right)^{+2} - 2 \frac{\lambda}{\ell} \left(\frac{m}{\ell} \right)^{+1} \right];$$

$$A_5 = \frac{q_0 \ell^2 N}{12 F_1 G (\ell - b)} \left[\left(\frac{z_1}{\ell} \right)^{+1} - 3 \frac{b}{\ell} \ln \left(\frac{z_1}{\ell} \right) \right] -$$

$$- \frac{\pi e_0 \ell^4 b_2}{(\ell - \lambda) \alpha b_1} \cdot \frac{d_2(z_1)}{2} \left[\frac{1}{2(3+k^2)} \left(\frac{z_1}{\ell} \right)^{-1} - \frac{1}{4+k^2} \frac{\lambda}{\ell} \left(\frac{z_1}{\ell} \right)^{-2} \right];$$

$$A_6 = \frac{q_0 \ell^2 N}{12 F_1 G (\ell - b)} \left[\left(\frac{z_2}{\ell} \right)^{+1} - 3 \frac{b}{\ell} \ln \left(\frac{z_2}{\ell} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\pi e_0 \ell^4 b_2}{(\ell - \lambda) \alpha b_1} \cdot \frac{d_2(z_2)}{2} \left[\frac{1}{2(3+k^2)} \left(\frac{z_2}{\ell} \right)^{-1} - \frac{1}{4+k^2} \frac{\lambda}{\ell} \left(\frac{z_2}{\ell} \right)^{-2} \right];$$

$$A_7 = \frac{q_0 \ell^2 (3-N)}{24 F_1 G (\ell - b)} \left(\frac{z_1}{\ell} \right)^{+2} + \frac{q_0 \ell b}{4 F G (\ell - b)} \left(\frac{z_1}{\ell} \right)^{+1} \left[N \left(\ln \frac{z_1}{\ell} - 1 \right) - 2 \right] -$$

$$- \frac{\pi e_0 \ell^2 d_2(z_1)}{2(\ell - \lambda) \alpha b_1} \left[- \frac{3a + b_1 \ell^2}{2(3+k^2)} \ln \frac{z_1}{\ell} - \frac{4a + b_1 \ell^2}{4+k^2} \frac{\lambda}{\ell} \left(\frac{z_1}{\ell} \right)^{-1} \right];$$

$$A_8 = \frac{q_0 \ell^2 (3-N)}{24 F_1 G (\ell - b)} \left(\frac{z_2}{\ell} \right)^{+2} + \frac{q_0 \ell b}{4 F_1 G (\ell - b)} \left(\frac{z_2}{\ell} \right)^{+1} \left[N \left(\ln \frac{z_2}{\ell} - 1 \right) - 2 \right] +$$

$$+ \frac{\pi e_0 \ell^2 d_2(z_2)}{2(\ell - \lambda) \alpha b_1} \left[- \frac{3a + b_1 \ell^2}{2(3+k^2)} \ln \frac{z_2}{\ell} - \frac{4a + b_1 \ell^2}{4+k^2} \frac{\lambda}{\ell} \left(\frac{z_2}{\ell} \right)^{-1} \right].$$

По разработанному алгоритму была составлена программа на языке ФОРТРАН. В качестве примера выполнены расчеты для четырех-полюсного конического кессона с углом стреловидности $\chi = 30^\circ$ при следующих геометрических параметрах: $\ell = 213,5$ см; $m = 93,5$ см; $L = \ell - m = 120$ см; $d_1 = 18$ см; $d_2 = 60$ см; $\delta_1 = 0,2$ см; $\delta_2 = 0,3$ см; $\Delta F = 3,5$ см².

Модуль упругости материала $E = 7 \cdot 10^4$ МПа, $\gamma = \frac{E}{G} = 2,6$.

Расчеты выполнены для случая нагружения системы распределенной нагрузкой

$$q(z) = q_0 \frac{z-b}{\ell-b},$$

где параметр b принят равным 63,5 см.

Эпюры нормальных напряжений по переднему и заднему лонжерону кессона, полученные в результате расчетов на ЭВМ, приведены на рис. 4, а графики прогибов - на рис. 5.

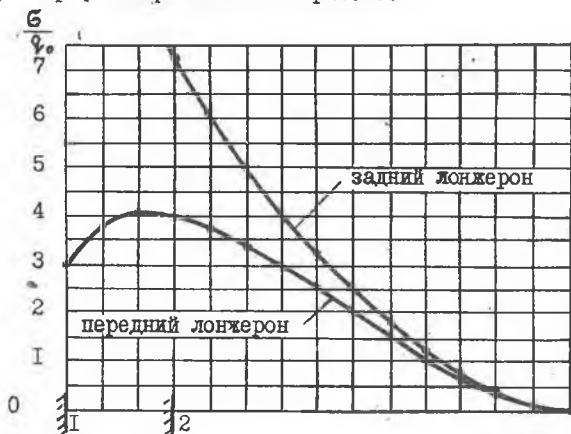


Рис. 4

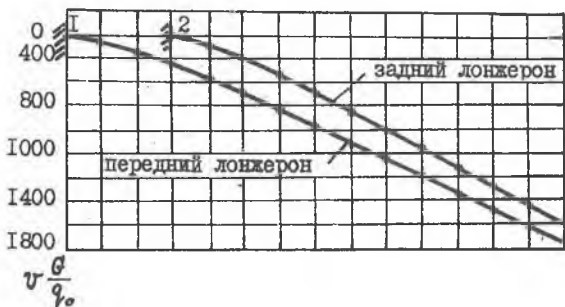


Рис. 5

Л и т е р а т у р а

1. Образцов И.Ф. Некоторые вопросы расчета на прочность тонкостенных конструкций самолета. - М.: Оборонгиз, 1957. - 176 с.
2. Образцов И.Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных вариационных пространственных конструкций. - М.: Машиностроение, 1966. - 392 с.
3. Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных систем. М.: Машиностроение, 1973. - 659 с.
4. Коньвалов Б.А. К расчету конических оболочек вариационным методом В.З.Власова. - В сб.: Прочность авиационных конструкций. - М.: Оборонгиз, 1960, труды МАИ, вып. 130, с.19-56.

УДК 539.3:629.7.015.4

И.С.Ахмедьянов

О РАСЧЕТЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ЖЕСТКИМИ КРУГЛЫМИ ШАЙБАМИ

В работе /1/ изложена методика расчета сферической оболочки с жесткой круглой шайбой, смещенной на некоторое расстояние от полюса оболочки. В предлагаемой статье приводятся общие соотношения для исследования напряженно-деформированного состояния сферической оболочки с несколькими произвольно расположенными жесткими круглыми шайбами.

В основу работы положены зависимости, приведенные в /2,3/ (с сохранением принятых там основных обозначений).

1. Рассмотрим сферическую оболочку в виде сферического сегмента, ограниченного параллелью $\alpha = \alpha^0$ (рис.1; α, β - общая географическая система координат с полюсом в вершине оболочки). Пусть на нормалях к срединной поверхности оболочки, определяемых углами $\alpha = A_i, \beta = B_i$ ($i = 1, 2, \dots, S$; S - число шайб), расположены центры S жестких круглых шайб, к каждой из которых приложена заданная система сил и моментов. Кроме того, оболочка может подд-