решения для построения матрицы жесткости цилиндрической оболочки.- В сб.: Вопросы прикладной механики в авиационной технике. Куйбышев: Куйбышевский авиационный институт, 1975, вып. 77.

4. Биргер И.А. и др. Расчет на прочность деталей машин. : Справочник. - М.: Машиностроение, 1979.

УДК 539.3:624.074

И.С.Ахмедьянов, В.Е.Кремс

РАСЧЕТ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ДВУМЯ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ЖЕСТКИМИ КРУГЛЫМИ ШАЙБАМИ

В /1/ изложено общее решение задачи о расчете сферической оболочки с несколькими произвольно расположенными жесткими круглыми шайбами. В предлагаемой статье приводятся дополнительные соотношения применительно к этой задаче. Кроме того, представлены некоторые результаты числового расчета сферической оболочки с двумя шайбами, воспринимающими касательные силы.

1. Для составления граничных условий по контурам шайб и по опорной параллели, а также для расчета внутренних усилий, моментов и перемещений в сферической оболочке необходимо располагать координатами одной и той же точки ее срединной поверхности в различных системах координат.

Пусть ψ_i, φ_i - координаты некоторой точки C срединной поверхности сферической оболочки в i-ой местной системе координат, связанной с i-ой шайбой (рис.1) /1/. Тогда для координат α, β этой точки в общей системе координат будем иметь /2/:

$$\cos\alpha = \cos A_i \cos\psi_i - \sin A_i \sin\psi_i \cos\varphi_i, \tag{1}$$

$$\cos(\beta - B_i) = \frac{\cos\psi_i - \cos A_i \cos\alpha}{\sin A_i \sin\alpha}. \tag{2}$$

Так как $0 \le \alpha \le \pi$, то

$$\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha}. \tag{3}$$

Согласно теореме синусов /2/:

$$\sin(\beta - B_i) = \sin\varphi_i \frac{\sin\psi_i}{\sin\alpha}. \tag{4}$$

Тогда в соответствии с (2) будет:

$$\beta = B_i + \arccos\left(\frac{\cos\varphi_i - \cos A_i \cos\alpha}{\sin A_i \sin\alpha}\right) \tag{5}$$

при $0 \le \varphi_i \le \pi$ и

$$\beta = B_i + 2\pi - \arccos\left(\frac{\cos\varphi_i - \cos A_i \cos\alpha}{\sin A_i \sin\alpha}\right) \tag{6}$$

при $\pi < \varphi_i < 2\pi$.

Для угла θ_i, под которым пересекаются меридианы $\varphi_i = const$ и $\beta = const$, можно получить следующие соотношения /2/:

$$\cos\theta_i = \frac{\cos A_i - \cos\alpha\cos\psi_i}{\sin\alpha\sin\psi_i}, \tag{7}$$

$$\sin\theta_i = \sin A_i \frac{\sin\varphi_i}{\sin\alpha}. \tag{8}$$

Если известны координаты α, β точки C в общей системе координат, то ее координаты ψ_i, φ_i в i-ой местной системе координат можно определить из зависимостей:

$$\cos\psi_i = \cos A_i \cos\alpha + \sin A_i \sin\alpha \cos(\beta - B_i), \tag{9}$$

$$\sin\psi_i = +\sqrt{1 - \cos^2\psi_i}, \tag{10}$$

$$\cos\varphi_i = \frac{\cos A_i \cos\psi_i - \cos\alpha}{\sin A_i \sin\psi_i}, \tag{11}$$

$$\sin\varphi_i = \sin\alpha \frac{\sin(\beta - B_i)}{\sin\psi_i}. \tag{12}$$

Отсюда

$$\varphi_i = \arccos\left(\frac{\cos A_i \cos\psi_i - \cos\alpha}{\sin A_i \sin\psi_i}\right) \tag{13}$$

при $0 \le \beta - B_i \le \pi$ и

$$\varphi_i = 2\pi - \arccos\left(\frac{\cos A_i \cos\psi_i - \cos\alpha}{\sin A_i \sin\psi_i}\right) \tag{14}$$

при $\pi < (\beta - B_i) < 2\pi$.

Для угла θ_i будут справедливы формулы (7) и (8).

2. Совокупность граничных условий (I8) /I/ по контурам шайб и условий закрепления оболочки по нижней опорной параллели будет в себе содержать бесконечные тригонометрические ряды. Если в этих рядах ограничиться соответственно ($K^\circ+1$) и ($n_1^\circ+1$), ($n_2^\circ+1$), ..., ($n_s^\circ+1$) членами (s – число шайб), то в упомянутых условиях число всех неизвестных произвольных постоянных будет равно

$$N=8(n_1^\circ+n_2^\circ+\ldots+n_s^\circ+K^\circ)+4(s+1).$$

Для их определения необходимо составить N уравнений. Из них первые $8\left(n_1^\circ+n_2^\circ+\ldots+n_s^\circ+\frac{1}{2}s\right)$ уравнений можно получить, удовлетворяя условиям (I8) /I/ в отдельных точках контуров шайб. С этой целью разбиваем контур $\psi_i=\psi_i^\circ=const$ i-ой шайбы на ($2n_i^\circ+1$) частей точками $\varphi_{i,0}, \varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,2n_i}$, принимая

$$\varphi_{i,j}=j\,\Delta\varphi_i, \quad \Delta\varphi_i=\frac{2\pi}{2n_i^\circ+1}, \quad j=0,1,2,\ldots,2n_i^\circ.$$

Для каждой из этих точек разбиения записываем условия (I8) /I/, полагая в них последовательно $\varphi_i=\varphi_{i,0}, \varphi_i=\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_i=\varphi_{i,2n_i^\circ}$.

В результате получатся ($8n_i^\circ+4$) уравнения.

Удовлетворив подобным образом граничным условиям по контурам всех s шайб, мы будем располагать $8\left(n_1^\circ+n_2^\circ+\ldots+n_s^\circ+\frac{1}{2}s\right)$ уравнениями.

Недостающие ($8K^\circ+4$) уравнения составим, записав условия закрепления всей оболочки в отдельных точках β_j контура $\alpha=\alpha^\circ$:

$$\beta_j=j\,\Delta\beta, \quad \Delta\beta=\frac{2\pi}{2K^\circ+1}, \quad j=0,1,2,\ldots,2K^\circ.$$

3. Приведем результаты расчета оболочки в виде полусферы с двумя жесткими круглыми шайбами, центры которых располагаются в плоскости меридиана $\beta=0$.

Исходные данные: $R=900$ мм, $h=3$ мм,

$$B_1=0, \quad A_1=20^\circ, \quad \psi_1^\circ=6^\circ,$$

$$B_2=0, \quad A_2=44^\circ, \quad \psi_2^\circ=6^\circ,$$

$$\mu=0{,}3, \quad E=7\cdot10^4 \text{ МПа}.$$

Обе шайбы нагружены одинаковыми касательными силами:

$$P_{\xi1}=P_{\xi2}=10000 \text{ Н}.$$

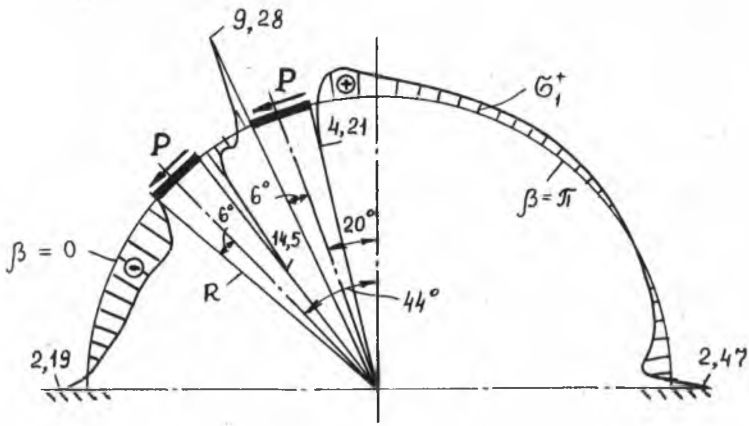

9,28
P
P
4,21
6°
6°
14,5
20°
44°
R
β = 0
β = π
σ_1^+
2,19
2,47

Рис. I

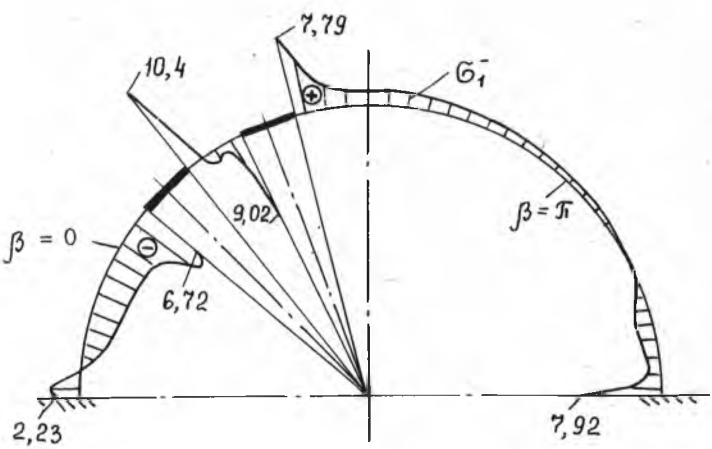

7,79
10,4
σ_1^-
9,02
β = 0
β = π
6,72
2,23
7,92

Рис. 2

Расчеты проводились для случая жесткого защемления опорной параллели $\alpha = \alpha^{\circ} = 90^{0}$. Граничные условия по контурам шайб и по контуру $\alpha = \alpha^{\circ}$ удовлетворялись в отдельных точках ($n_1^{\circ} = 10$, $n_2^{\circ} = 10$, $k^{\circ} = 10$, $N = 132$).

Результаты вычислений представлены на рис. I и 2 (в МПа). Здесь через σ_1^{+} и σ_2^{-} обозначены напряжения в точках наружной и внутренней поверхностей оболочки в общей системе координат α , β

$$\sigma_1^{+} = \frac{N_1}{h} + \frac{6M_1}{h^2}, \qquad \sigma_1^{-} = \frac{N_1}{h} - \frac{6M_1}{h^2}.$$

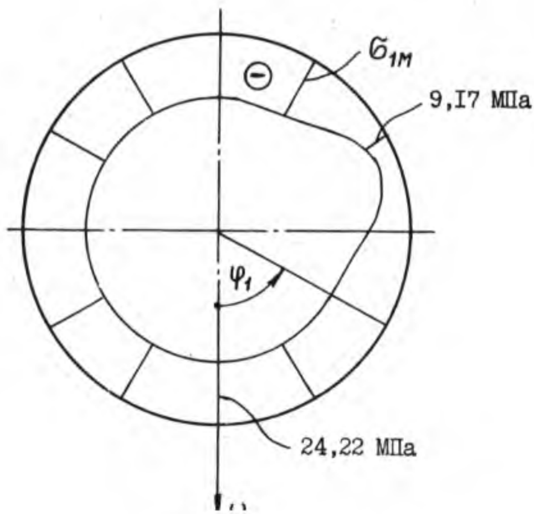
Перемещения шайб получились равными:

$$\Delta_{r_1} = 0{,}115 \text{ мм}, \qquad \Delta_{r_2} = 0{,}100 \text{ мм}.$$

4. В качестве второго примера была рассмотрена сферическая оболочка, имеющая две шайбы с координатами центров

$$A_1 = 20^{0}, \qquad B_1 = 0 ,$$
$$A_2 = 20^{0}, \qquad B_2 = 45^{0}$$

и нагруженная внутренним давлением $p = 0{,}1$ МПа.



Угловые размеры шайб:

$$2\varphi_1^\circ = 2\varphi_2^\circ = 12^\circ.$$

Остальные параметры оболочки те же, что и у рассмотренной ранее.

Расчеты были выполнены при $n_1^\circ = n_2^\circ = K_\circ = 7$. Общее число неизвестных произвольных постоянных $N = 180$.

На рис.3 представлено распределение напряжений

$$\sigma_{1M} = \frac{6M_1}{h^2}$$

в точках контура первой шайбы (в местной системе координат).

Перемещения шайб:

$$\Delta_{\xi 1} = \Delta_{\xi 2} = 0{,}139 \text{ мм}.$$

Л и т е р а т у р а

1. Ахмедьянов И.С. О расчете сферической оболочки с несколькими произвольно расположенными жесткими круглыми шайбами. - В кн.: Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сб. - Куйбышев: КуАИ, 1983, с.29-37.

2. Степанов Н.Н. Сферическая тригонометрия. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948. - 155 с.

УДК 629.7.015.4:539.3

В.М.Балык, В.С.Литвинов, Б.И.Сахаров

ФОРМАЛИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ СОВМЕСТНОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОЗАМКНУТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Особенность моделирования работы многозамкнутых конструкций заключается в необходимости учета совместности работы отдельных элементов конструкции. Определение напряженно-деформированного состояния таких конструкций, как правило, проводится на основе обобщенного метода перемещений Образцова И.Ф. /1,2/, в котором пространственные функции депланации взаимоувязываются с условиями совместности.

Продольное $u(z,s)$ и поперечное $v(z,s)$ перемещения в конструкции представляются в виде следующего конечного ряда: