ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, 1980

УДК 629.7:534

М.Б.Вахитов, И.С.Селин, М.Ф.Гарифуллин

РАСЧЕТ НА КОЛЕБАНИЯ НЕСУЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С УЧЕТОМ ИЗГИБА ХОРДЫ

При расчете динамических характеристик несущих поверхностей летательных аппаратов, судов с динамическими принципами поддержания (СДПП) и т.д. широко используется модель с недеформируемой хордой. Она проста и при значительных удлинениях для низших тонов дает хорошие результаты. Однако для крыльев малого удлинения, характерных для СДПП, а также несущих и управляющих поверхностей с частичной заделкой по корневой хорде эта модель приводит к пропуску тонов даже в нижней части спектра. Дело в том, что для таких конструкций практически все тона оказываются связанными с изгибом хорды. Последний фактор, как показывают исследования, существенно влияет на частоты и формы колебаний. Поэтому возникает необходимость уточнения расчетной модели указанных крыльев. В работах [1], [2] для учета изгиба хорды в статических задачах был предложен метод прямых в сочетании с методом интегрирующих матриц [3]. Здесь предлагается использовать эту комбинацию методов при решении задачи свободных колебаний.

1. Вывод интегро-дифференциальных уравнений.

Монолитную несущую (управляющую) поверхность моделируем произвольной в плане четырехугольной (в пределе – треугольной) консольной пластиной переменной толщины. Уравнения колебаний такой пластины получим из вариационного принципа Гамильтона-Остроградского

$$\int_{t_0}^{t} (\delta K - \delta \Pi + \delta A)\, dt = 0, \tag{1}$$

где δK – вариация кинетической энергии, $\delta \Pi$ – вариация потенциальной энергии, δA – вариация работы.

После подстановки выражений δK, $\delta \Pi$, δA в (1) с учетом произвольности возможных перемещений получаем для монолитного крыла-пластины следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right]+2(1-\mu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(D\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)-$$
$$-q+\rho\left[h\ddot W+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12}\frac{\partial \ddot W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^3}{12}\frac{\partial \ddot W}{\partial y}\right)\right]=0, \tag{2}$$

$$D\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(\cos^2\beta+\mu\sin^2\beta)+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(\sin^2\beta+\mu\cos^2\beta)+2(1-\mu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\sin\beta\cos\beta-\right.$$
$$\left.-M_N=0,\right. \tag{3}$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left[D(1-\mu)\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\sin\beta\cos\beta-\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}(\cos^2\beta-\sin^2\beta)\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\right]\cos\beta+\frac{\partial}{\partial y}\left[D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right]\sin\beta+$$
$$+(1-\mu)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)\sin\beta+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)\cos\beta\right]+Q_N-\frac{\partial M_{N\tau}}{\partial s}+\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial \ddot W}{\partial N}=0, \tag{4}$$

где β – угол поворота внешней нормали N от оси OX по часовой стрелке.

Рассмотрим решение системы на примере прямоугольной консольной пластины.

При малых гармонических колебаниях статическая и динамическая задачи разделяются, и последнюю можно решать независимо от первой. Пренебрегая в граничном условии (4) слагаемым $\rho\frac{h^3}{12}\frac{\partial \ddot W}{\partial N}$ ввиду его малости, получим упрощенные граничные условия:

$$\text{при}\quad \begin{array}{lll} X=0 & W=0, & \dfrac{\partial W}{\partial x}=0; \\ X=\ell & M_x=0, & \dfrac{\partial M_x}{\partial x}+2\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y}=0; \\ y=0 & M_y=0, & \dfrac{\partial M_y}{\partial y}+2\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x}=0; \\ y=a & M_y=0, & \dfrac{\partial M_y}{\partial y}+2\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x}=0. \end{array} \tag{5}$$

С принятыми допущениями уравнение (2) эквивалентно

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=q^*, \tag{6}$$

где

$$q^* = \rho\left[h\ddot{W} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12}\frac{\partial \ddot{W}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h^3}{12}\frac{\partial \ddot{W}}{\partial y}\right)\right].$$

Проинтегрировав (6) дважды по x от x до ℓ с учетом (5) получим

$$M_x - 2\int_x^\ell \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dx + \int_x^\ell\int_x^\ell \frac{\partial M_y}{\partial y^2}dx\,dx = \int_x^\ell\int_x^\ell q^* dx\,dx. \qquad (7)$$

2. Численное решение.

Используем метод конечных разностей, заменив дифференцирование по y конечно-разностными выражениями:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_i = \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2\Delta}; \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_i = \frac{W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}}{\Delta^2},$$

где W_i – значение функции на i -той прямой, Δ – шаг сетки.

Тогда уравнение (7) приведется к системе n уравнений вида

$$M_{xi} - 2\int_x^\ell \frac{M_{xy,i+1} - M_{xy,i-1}}{2\Delta}dx + \int_x^\ell\int_x^\ell \frac{M_{y,i+1} - 2M_{y,i} + M_{y,i-1}}{\Delta^2}dx\,dx =$$

$$= \int_x^\ell\int_x^\ell q_i^* dx\,dx; \quad (i = 3, 4, \ldots, n-2). \qquad (8)$$

Для граничных прямых (i = I, 2, n -I, n) учтем граничные условия на передней и задней кромке. При i = I получим

$$M_{x1} - 2\int_x^\ell \frac{M_{xy2} - M_{xy1}}{\Delta}dx + \int_x^\ell\int_x^\ell \frac{1}{\Delta}\left[\left(\frac{\partial M_y}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial M_y}{\partial y}\right)_1\right]dx\,dx =$$

$$= \int_x^\ell\int_x^\ell q_1^* dx\,dx,$$

$$\left(\frac{\partial M_y}{\partial y}\right)_2 = \frac{M_{y3} - M_{y1}}{2\Delta} = \frac{M_{y3}}{2\Delta},$$

$$\left(\frac{\partial M_y}{\partial y}\right)_1 = -2\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)_1,$$

$$M_{y1} = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_1 = 0.$$

Следовательно,

$$M_{x1} = -D(1-\mu^2)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},$$

$$M_{x1} = 2\int_x^\ell \frac{M_{xy2}}{\Delta}dx + \int_x^\ell\int_x^\ell \frac{M_{y3}}{2\Delta^2}dx\,dx = \int_x^\ell\int_x^\ell q_1^* dx\,dx. \qquad (9)$$

Аналогичным образом запишутся уравнения для $i = 2,\ n-1,\ n$.

Выразив M и q^* в (8), (9) через перемещения и замени интегралы конечными суммами при помощи аппарата интегрирующи матриц [3], получим матричное уравнение порядка ($n \times m$) вида

$$\text{Ж} W''_{xx} = \omega^2 U W''_{xx}, \qquad (\text{IO}$$

которое решается одним из известных методов [4].

Таблица

$w^{**} = w_\alpha / w_{100\%\ \text{эксп.}}$					
α заделк. %	I00	80	60	40	20
$w^{**}_{\text{эксп.}}$	I	0,75	0,60	0,39	0,I0
$w^{**}_{\text{расч.}}$	0,96	0,68	0,5I	0,36	0,I2

В таблице I приведены некоторые результаты расчета консоль ной пластины при $\lambda = 5$ и $\lambda = 0,5$. Анализ результатов показыва ет, что при больших удлинениях крыла удовлетворительные результа ты дает более простая модель с недеформируемой хордой. При малы же удлинениях ($\lambda < 1$) деформация хорды оказывает значительное влияние на частоты и формы колебаний, вплоть до перестановки то нов и появления новых.

Таблица

$w^* = w \cdot \ell^2 / \sqrt{D/\rho h}$										
λ	0,5					5				
№ тона	I	2	3	4	5	I	2	3	4	5
Форма										
$w^*_{\text{эксп.}}$	3,40	5,38	I0,3I	-	-	3,35	20,88	32,4	-	97,4
$w^*_{\text{недеф.}}$	3,45	5,52	-	-	22,6	3,40	22,I	34,2	62,I	I04
$w^*_{\text{деф.}}$	3,42	5,2I	I0,I	I8,9	20,2	3,39	20,9	3I,3	6I,8	90,9

В таблице 2 показано влияние заделки на частоту крутильного тона. Приведенные результаты подтверждают необходимость учета деформации изгиба хорды для крыльев малого удлинения и при неполной их заделке по корневой хорде. Заметим, что схема с недеформируемой хордой вообще не способна учитывать частичную заделку.

Литература

I. Вахитов М.Б., Сафариев М.С. К применению метода прямых для расчета пластин. - Труды КАИ, вып. I43, I972, с. 59-67.

2. Сафариев М.С., Халиуллин В.И. К расчету прочности несущих поверхностей подводных крыльев с опорами по части хорды. - В кн.: Вопросы расчета прочности конструкции летательных аппаратов. Межвузовский сборник, изд. КАИ, вып. I, I976, с. 65-68.

3. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы - аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики. - ИВУЗ, Авиационная техника, I966, № 3, с. I8-27.

4. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. - М.: Физматгиз, I960, - 656 с.