ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 4, 1978

УДК 624.072.4

И.С.Ахмедьянов

# РАСЧЕТ КРУГОВОГО КОЛЬЦА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ ПРИ СИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

## Обозначения

$r$ – радиус осевой линии кольца, проходящей через центры тяжести поперечных сечений; $\varphi$ – угловая координата точки осевой линии; $x$, $y$, $z$ – подвижная правая прямоугольная система осей координат (начало координат на осевой линии кольца, ось $x$ направлена перпендикулярно плоскости осевой линии, ось $y$ – по касательной к осевой линии в сторону возрастания угла $\varphi$, ось $z$ – по радиусу от центра кольца); $u$, $v$, $w$ – проекции полного перемещения точки осевой линии на оси $x$, $y$, $z$; $\theta$ – угол поворота поперечного сечения кольца вокруг оси $y$; $P_x$, $P_y$, $P_z$, $m_x$, $m_y$, $m_z$ – проекции распределенных сил и моментов на оси $x$, $y$, $z$; $N$, $Q_z$, $Q_x$ – нормальная и перерезывающие силы в сечении кольца; $M_x$, $M_z$, $M_y$ – изгибающие и крутящий моменты в сечении кольца; $F$, $J_x$, $J_z$, $J_{zx}$ – площадь и моменты инерции сечения кольца; $E$ – модуль упругости материала кольца; $C$ – жесткость сечения кольца на кручение;

$$B = EF, \quad B_x = EJ_x, \quad B_z = EJ_z, \quad B_{zx} = EJ_{zx},$$

$$\alpha = B_{zx}/B_x, \quad \beta = B_{zx}/B_z, \quad K = B_z/C, \quad \nu = B_x/r^2 B,$$

$$A_x = r^3/B_x, \quad A_z = r^3/B_z, \quad D_x = B_x/r^3, \quad D_z = B_z/r^3,$$

$$\omega = \frac{1}{1-\alpha\beta}, \qquad \lambda = 1 - \alpha\beta\frac{K}{K+1}.$$

Штрих означает производную по углу $\varphi$ .

I. В [I] были получены следующие дифференциальные уравнения изгиба кругового стержня с произвольным расположением главных осей инерции поперечного сечения:

$$u^{VI} + 2u^{IV} + u'' = \omega A_z (rp_x + m_y + m_z')'' -$$

$$- KA_z(rp_x + m_y + m_z') + KA_z(m_y'' + m_y) -$$

$$- \beta\omega A_x[r(p_y + p_z')' - (m_x'' + m_x)'],$$

$$v^{VI} + 2v^{IV} + v'' = -\omega A_x[r(p_y + p_z') - (m_x'' + m_x)] -$$

$$- \lambda A_x r(p_y' - p_z)''' + \alpha\omega A_z(rp_x + m_y + m_z')',$$

$$w'' + w = -(v'' + v)' - \lambda A_x r(p_y' - p_z). \tag{I}$$

Располагая решением этих уравнений, можно, используя формулы

$$r\theta = -\frac{1}{K+1}\left[(u'' + u)'' + (K+1)u''\right] + \frac{K}{K+1}A_z m_y +$$

$$+ \frac{A_z}{K+1}(rp_x + m_y + m_z') + \frac{\beta}{K+1}\left[(v - w')''' + (K+1)(v - w')'\right], \tag{2}$$

$$M_x = \frac{B_x}{r^2}(v - w')' - \frac{B_{zx}}{r^2}(u'' + r\theta),$$

$$M_z = -\frac{B_z}{r^2}(u'' + r\theta) + \frac{B_{zx}}{r^2}(v - w')',$$

$$M_y = \frac{C}{r^2}(r\theta - u)', \tag{3}$$

$$N = \frac{B}{r}(v' + w), \tag{4}$$

определить угол поворота, моменты и нормальную силу для любого сечения кольца.

Для перерезывающих сил $Q_x$ и $Q_z$ из уравнений равновесия элемента кольца следуют соотношения:

$$Q_x = \frac{1}{r}(\mathcal{M}'_z - \mathcal{M}_y) + m_z, \qquad (5)$$

$$Q_z = -\frac{1}{r}\mathcal{M}'_x + m_x, \qquad (6)$$

$$Q_z = N' + rp_y. \qquad (7)$$

2. Рассмотрим замкнутое кольцо, нагруженное пространственной системой сосредоточенных и распределенных сил и моментов.

Осевая линия кольца точками приложения сосредоточенных нагрузок разбивается на отдельные участки. Для каждого из них можно записать следующее общее решение уравнений (I):

$$u = u^\circ + u_p, \quad v = v^\circ + v_p, \quad w = w^\circ + w_p. \qquad (8)$$

Здесь $u_p$, $v_p$, $w_p$ – частное решение системы (I), определяемое распределенной нагрузкой; $u^\circ$, $v^\circ$, $w^\circ$ – общее решение соответствующих однородных уравнений:

$$u^\circ = A_1 \sin\varphi + A_2 \cos\varphi + A_3 \varphi\cos\varphi + A_4 \varphi\sin\varphi + A_5 \varphi + A_6, \qquad (9)$$

$$v^\circ = B_1 \sin\varphi + B_2 \cos\varphi + B_3 \varphi\cos\varphi + B_4 \varphi\sin\varphi + B_5 \varphi + B_6,$$

$$w^\circ = C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi + B_3 \varphi\sin\varphi - B_4 \varphi\cos\varphi - B_5. \qquad (10)$$

$A_i$, $B_i$, $C_1$, $C_2$ – произвольные постоянные, из которых $A_i$, $B_i$ находятся из условий сопряжения участков кольца между собой, а $C_1$, $C_2$ – из сравнения значений поперечных сил $Q_z$, вычисленных по двум независимым уравнениям равновесия (6) и (7).

3. Пусть нагрузка, приложенная к кольцу, симметрична относительно сечения $\varphi = 0$. В этом случае распределенные усилия $p_x$, $p_y$, $p_z$ и моменты $m_x$, $m_y$, $m_z$ можно представить в виде тригонометрических рядов

$$p_x(p_z, m_y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{xn}(p_{zn}, m_{yn}) \cos n\varphi,$$

$$p_y(m_x, m_z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{yn}(m_{xn}, m_{zn}) \sin n\varphi. \qquad (11)$$

Вносся значения (II) в (I) и интегрируя полученные уравнения, будем иметь (с учетом высказанного ранее замечания относительно постоянных $C_1$ и $C_2$):

$$u = u^\circ + \sum_{n=0}^{\infty} u_{pn}, \qquad v = v^\circ + \sum_{n=1}^{\infty} v_{pn},$$

$$w = w^\circ + \sum_{n=0}^{\infty} w_{pn}, \qquad \theta = \theta^\circ + \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{pn}. \tag{I2}$$

Здесь $u^\circ$, $v^\circ$ определяются по (9).

Перемещения $w^\circ$ и $\theta^\circ$ выражаются формулами:

$$w^\circ = -(B_1 + \zeta B_3)\cos\varphi + (B_2 - \zeta B_4)\sin\varphi + B_3\varphi\sin\varphi -$$

$$- B_4\varphi\cos\varphi - B_5 - 2\alpha\nu a(A_3\sin\varphi - A_4\cos\varphi),$$

$$r\theta^\circ = (A_1 + 2bkA_3)\sin\varphi + (A_2 - 2bkA_4)\cos\varphi + A_3\varphi\cos\varphi +$$

$$+ A_4\varphi\sin\varphi - 2\beta ak(B_3\cos\varphi + B_4\sin\varphi) + \beta B_5, \tag{I3}$$

$$\zeta = \frac{1-\lambda\nu}{1+\lambda\nu}, \qquad b = \frac{1+\nu(1-\alpha\beta)}{(k+1)(1+\lambda\nu)}, \qquad a = \frac{1}{(k+1)(1+\lambda\nu)}.$$

Для $n = 0$ имеем:

$$u_{p0} = -\frac{k}{2} A_z r p_{x0}\varphi^2, \qquad w_{p0} = \frac{r^2}{B} p_{z0},$$

$$r\theta_{0p} = kA_z r p_{x0} + A_z(r p_{x0} + m_{y0}). \tag{I4}$$

Для $n = I$:

$$u_{p1} = -\frac{1}{8} A_z[\alpha\omega X_{p1} + (k+\omega)Y_{p1}]\varphi^2\cos\varphi,$$

$$v_{p1} = -\frac{1}{8} A_x[(\omega+\nu)X_{p1} + \beta\omega Y_{p1}]\varphi^2\sin\varphi,$$

$$w_{p1} = \nu A_x(r_0 Z_{p1} + \beta akm_{y1})\cos\varphi +$$

$$+ \frac{1}{4} A_x X_{p1}\left[(\omega-\nu)\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2}(\omega+\nu)\varphi^2\cos\varphi + \eta\cos\varphi\right] +$$

$$+\frac{1}{8}\alpha A_z Y_{p1}[\omega(2\varphi\sin\varphi+\varphi^2\cos\varphi)-\xi\cos\varphi],$$

$$\theta_{p1}=ak A_z[\alpha\nu Z_{p1}+(1+\nu)m_{y1}]\cos\varphi-$$

$$-\frac{1}{8}\beta A_x X_{p1}[\omega\varphi^2\cos\varphi+4ak(\omega-\nu)\cos\varphi]+$$

$$+\frac{1}{4}k A_z Y_{p1}\left(2c\cos\varphi-2\varphi\sin\varphi-\frac{k+\omega}{2k}\varphi^2\cos\varphi\right). \qquad (15)$$

Для $n \geqslant 2$:

$$u_{pn}=A_z(\alpha_n r p_{xn}+\beta_n m_{yn}+\gamma_n m_{zn})\cos n\varphi+$$

$$+\beta\omega A_x n\tau_n^2[rp_{yn}-nrp_{zn}+(n^2-1)m_{xn}]\cos n\varphi,$$

$$v_{pn}=A_x(\eta_n rp_{yn}-\lambda_n rp_{zn}+\mu_n m_{xn})\sin n\varphi+$$

$$+\alpha\omega A_z n\tau_n^2(rp_{xn}+m_{yn}+nm_{zn})\sin n\varphi,$$

$$w_{pn}=A_x(-\lambda_n rp_{yn}+\nu_n rp_{zn}-\xi_n m_{xn})\cos n\varphi-$$

$$-\alpha\omega A_z n^2\tau_n^2(rp_{xn}+m_{yn}+nm_{zn})\cos n\varphi,$$

$$\theta_{pn}=A_z(\beta_n rp_{xn}+\delta_n m_{yn}+\zeta_n m_{zn})\cos n\varphi+$$

$$+\beta\omega A_x n\tau_n^2[rp_{yn}-nrp_{zn}+(n^2-1)m_{xn}]\cos n\varphi. \qquad (16)$$

В этих формулах

$$X_{p1}=r(p_{y1}-p_{z1}),\quad Y_{p1}=rp_{x1}+m_{y1}+m_{z1},\quad Z_{p1}=rp_{y1}-m_{x1},$$

$$c=\frac{k-3}{2(k+1)}-\frac{\alpha\beta}{(k+1)(1+\lambda\nu)}\left(\omega+\frac{2\nu k}{k+1}\right),\qquad \tau_0=\frac{1}{1+\lambda\nu},$$

$$\xi=4\nu a(k-\omega),\quad \eta=2\nu e,\quad e=\frac{\tau_0}{2}[1+\lambda(2\omega-\nu)],$$

$$\alpha_n = \tau_n^2(\kappa + \omega n^2), \quad \beta_n = n^2\tau_n^2(\kappa + \omega), \quad \gamma_n = n\alpha_n,$$

$$\delta_n = n^2\tau_n^2(\omega + \kappa n^2), \quad \zeta_n = n\beta_n, \quad \eta_n = \tau_n^2(\omega + \nu n^4),$$

$$\lambda_n = n\tau_n^2(\omega + \nu n^2), \quad \mu_n = \frac{\omega}{n}\tau_n, \quad \nu_n = n^2\tau_n^2(\omega + \nu),$$

$$\xi_n = n\mu_n, \quad \tau_n = 1/n(n^2-1).$$

Полученные результаты совместно с (3)-(7) и (II) позволяют записать следующие выражения для усилий и моментов в произвольном сечении кольца:

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_{x0} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_{xpn}, \qquad N = N_0 + \sum_{n=0}^{\infty} N_{pn},$$

$$\mathcal{M}_y = \mathcal{M}_{y0} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_{ypn}, \qquad Q_x = Q_{x0} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_{xpn},$$

$$\mathcal{M}_z = \mathcal{M}_{z0} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_{zpn}, \qquad Q_z = Q_{z0} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{zpn}. \qquad (17)$$

Здесь

$$\mathcal{M}_{x0} = -2\lambda\tau_0 r D_x(B_3\cos\varphi + B_4\sin\varphi) + rD_x(1-\alpha\beta)B_5 +$$
$$+ 2\beta a r D_z(A_3\sin\varphi - A_4\cos\varphi),$$

$$\mathcal{M}_{y0} = 2\delta r D_z(A_3\cos\varphi + A_4\sin\varphi) - \frac{r}{K}D_z A_5 +$$
$$+ 2\alpha a r D_x(B_3\sin\varphi - B_4\cos\varphi),$$

$$\mathcal{M}_{z0} = 2\delta r D_z(A_3\sin\varphi - A_4\cos\varphi) - 2\alpha a r D_x(B_3\cos\varphi + B_4\sin\varphi),$$

$$N_0 = 2\lambda\tau_0 D_x(B_3\cos\varphi + B_4\sin\varphi) + 2\beta a D_z(A_4\cos\varphi - A_3\sin\varphi),$$

$$Q_{x0} = \frac{1}{K}D_z A_5,$$

$$Q_{z0} = -2\lambda\tau_0 D_x(B_3\sin\varphi - B_4\cos\varphi) - 2\beta a D_z(A_3\cos\varphi + A_4\sin\varphi). \qquad (18)$$

$$\mathcal{M}_{xpo} = -\beta r(rp_{xo} + m_{yo}), \quad \mathcal{M}_{ypo} = r^2 p_{xo}\varphi,$$

$$\mathcal{M}_{zpo} = -r(rp_{xo} + m_{yo}), \quad N_{po} = rp_{zo}, \quad Q_{xpo} = -rp_{xo}\varphi, \tag{I9}$$

$$\mathcal{M}_{xp1} = \frac{1}{2} r X_{p1}(\varphi \sin\varphi - e\cos\varphi) +$$
$$+ r[\nu\lambda\tau_0 Z_{p1} - \beta a k m_{y1} + \frac{1}{2}\beta a(k-\omega) Y_{p1}]\cos\varphi,$$

$$\mathcal{M}_{yp1} = -ar[\alpha\nu Z_{p1} + (1+\nu) m_{y1} - \frac{1}{2}\alpha(\omega-\nu) X_{p1}]\sin\varphi -$$
$$- \frac{r}{2} Y_{p1}[\varphi\cos\varphi + (c+1)\sin\varphi],$$

$$\mathcal{M}_{zp1} = r[\alpha\nu a Z_{p1} - k b m_{y1} - \frac{\alpha}{2} a(\omega-\nu) X_{p1}]\cos\varphi -$$
$$- \frac{r}{2} Y_{p1}[\varphi\sin\varphi - (c+2)\cos\varphi],$$

$$N_{p1} = [\tau_0 Z_{p1} + \beta a k m_{y1} - \frac{1}{2}\beta a(k-\omega) Y_{p1}]\cos\varphi -$$
$$- \frac{1}{2} X_{p1}(\varphi\sin\varphi - e\cos\varphi),$$

$$Q_{xp1} = -rp_{x1}\sin\varphi,$$

$$Q_{zp1} = m_{x1}\sin\varphi - \frac{1}{2} X_{p1}[\varphi\cos\varphi + (e+1)\sin\varphi] +$$
$$+ [\lambda\nu\tau_0 Z_{p1} - \beta a k m_{y1} + \frac{1}{2}\beta a(k-\omega) Y_{p1}]\sin\varphi. \tag{20}$$

$$\mathcal{M}_{xpn} = -r\tau_n[rp_{yn} - nrp_{zn} + (n^2-1) m_{xn}]\cos n\varphi,$$

$$\mathcal{M}_{ypn} = -r\tau_n(rp_{xn} + n^2 m_{yn} + n m_{zn})\sin n\varphi,$$

$$\mathcal{M}_{zpn} = rn\tau_n(rp_{xn} + m_{yn} + n m_{zn})\cos n\varphi,$$

$$N_{pn} = n\tau_n(nrp_{yn} - rp_{zn})\cos n\varphi,$$

$$Q_{xpn} = -\frac{1}{n} r p_{xn} \sin n\varphi ,$$

$$Q_{zpn} = -n\tau_n (r p_{yn} - n r p_{zn}) \sin n\varphi . \tag{21}$$

5. В силу непрерывности в распределении усилий $p_x$, $p_y$, $p_z$ и моментов $m_x$, $m_y$, $m_z$ частное решение $u_p$, $v_p$ и $w_p$ для всех частей кольца будет одним и тем же.

## Литература

1. Ахмедьянов И.С. Расчет кругового кольца при произвольном расположении главных осей инерции поперечного сечения. – В сб.: Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Вып. 60. Труды КуАИ, Куйбышев, 1973.