ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 4, 1978

УДК 534.1

Ю.И.Филиппов

# РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ РАМЫ С НАТЯНУТОЙ НА НЕЕ ТЯЖЕЛОЙ МЕМБРАНОЙ

В современном машиностроении наблюдается усиление тенденции к экономному расходованию конструкционных материалов. Вследствие этого представляют интерес конструктивные элементы, имеющие вид произвольной рамы, на ряд замкнутых контуров которой натянуты гибкие растяжимые мембраны, нагруженные пассивной массой.

Теория динамического расчета таких конструкций в настоящее время еще недостаточно разработана. Имеются отдельные попытки расчета подобных систем. В ряде работ, как например [2],[3], рассматривается $T$ -образная рама, несущая тяжелое полотнище прямоугольной формы, закрепленное на ней по двум противолежащим краям. Полотнище схематически представлено в виде струны или одноосно напряженной мембраны. В [2], [3] дано решение простейшей из задач рассматриваемого класса; пути решения более общих задач не рассматриваются. Известен упрощенный способ расчета, при котором масса, распределенная по мембране, условно перераспределяется по раме. Тем самым игнорируется подвижность мембраны.

В данной работе предлагается метод расчета собственных форм и частот колебаний рассматриваемой конструкции, свободный от указанных недостатков.

Пространственные колебания исследуемой конструкции описываются неоднородным уравнением изгиба-кручения рамы

$$Lf(\tau,t)+M\ddot{f}(\tau,t)=-c\varphi(\tau,t) \quad (\tau\in S), \tag{1}$$

с однородными краевыми условиями

$$gf(r,t)=0 \qquad (r\in S_0) \tag{2}$$

и однородным уравнением узгиба-растяжения мембраны

$$\ell\varphi(r,t)-m\ddot{\varphi}(r,t)=0 \qquad (r\in V) \tag{3}$$

при неоднородных краевых условиях

$$\varphi(r,t)=f(r,t) \qquad (r\in S_M). \tag{4}$$

Все уравнения будем считать линейными.

Здесь $S$ – контур рамы, по условию многосвязный; $S_0$ – опорный контур рамы; $V$ – внутренняя область мембраны, по условию многосвязная; $S_M$ – опорный контур мембраны; $f(r,t)$ – вектор-функция перемещений рамы; $r$ – радиус-вектор точек рассматриваемой упругой системы; $t$ – время; $L$ – дифференциальный оператор изгиба-кручения рамы; $M$ – линейный оператор инерции рамы; $g$ – оператор, определяющий условия закрепления рамы; $\varphi(r,t)$ – вектор-функция цремещений мембраны; $\ell$ – дифференциальный оператор изгиба-растяжения мембраны; $m$ – линейный оператор инерции мембраны; $C$ – дифференциальный оператор, определяющий реакцию контура на деформированную мембрану.

В (I) на части $S$, не совпадающей с $S_M$, принимается тождественно $c\varphi(r,t)=0$.

Полагаем, что все особенности, обусловленные многосвязностью области $V$, внесены в определение функции $\varphi(r,t)$ и операторов $\ell$, $m$ и $C$.

Система (I)-(4) обладает бесконечным дискретным спектром решений $f_\nu(r,t)$, $\varphi_\nu(r,t)$, ... $\nu=1,2,\ldots$, отвечающих собственным частотам $\Omega_\nu$. Представляет интерес поиск решения по способу Бубнова-Галеркина в виде разложения в ряд по собственным функциям следующих однородных краевых задач:

$$Lf(r,t)+M\ddot{f}(r,t)=0 \qquad (r\in S), \tag{5}$$

$$gf(r,t)=0 \qquad (r\in S_0), \tag{6}$$

$$\ell\varphi(r,t)-m\ddot{\varphi}(r,t)=0 \qquad (r\in V), \tag{7}$$

$$\varphi(r,t)=0 \qquad (r\in S_M), \tag{8}$$

отвечающих колебаниям исходной рамы без мембраны и колебаниям мембраны, неподвижно закрепленной по контуру $S_M$ . Пусть это функции $F_i(r)$ с собственными частотами $\omega_i$ $(i=1,2,\ldots)$ и $\Phi_j(r)$ с собственными частотами $\bar{\omega}_j$ $(j=1,2,\ldots)$. Они образуют полные ортогональные системы.

Тогда упомянутое разложение существует и может быть записано так:

$$f(r,t)=\sum_i A_i F_i(r), \tag{9}$$

$$\varphi(r,t)=\varphi_0(r,t)+\sum_j a_j \Phi_j(r), \tag{10}$$

где $A_i$ , $a_j$ – коэффициенты разложения, являющиеся функциями времени; $\varphi_0(r,t)$ – квазистатическое перемещение мембраны вследствие деформации контура $S_M$ , отвечающее функции $f(r,t)$ .

Функция $\varphi_0(r,t)$ в свою очередь может быть в силу (9) разложена в ряд

$$\varphi_0(r,t)=\sum_i A_i \psi_i(r), \tag{11}$$

где функции $\psi_i(r)$ являются решениями задачи типа Дирихле для мембраны

$$\ell\,\psi_i(r)=0 \qquad (r\in V), \tag{12}$$

$$\psi_i(r)=F_i(r) \qquad (r\in S_M). \tag{13}$$

Краевые задачи (5)-(6), (7)-(8), (12)-(13) могут быть решены известными способами, поэтому считаем функции $F_i(r)$ , $\Phi_j(r)$ и $\psi_i(r)$ , а также соответствующие собственные частоты $\omega_i$ и $\bar{\omega}_j$ известными. Умножим почленно (1) на $F_p(r)$ , а (3) – на $\Phi_s(r)$ и проинтегрируем первое по всему контуру $S$ , а второе – по области $V$ , придавая индексам $p$ и $s$ всевозможные значения от 1 до $\infty$ . Тогда получим

$$\int_S F_p L f\,ds+\int_S F_p M\ddot{f}\,ds+\int_S F_p c\,\varphi\,ds=0 \qquad (p=1,2,\ldots) \tag{14}$$

$$\int_V \Phi_s \ell\,\varphi\,dv-\int_V \Phi_s m\ddot{\varphi}\,dv=0 \qquad (s=1,2,\ldots). \tag{15}$$

Замечаем, что в силу (13) справедливо равенство

$$\int_S F_p c\,\varphi\,ds=\int_S \psi_p c\,\varphi\,ds. \tag{16}$$

В соответствии с теоремой о взаимности работ

$$\int_S \psi_p c \varphi ds - \int_V \psi_p m \ddot{\varphi} dv = \int_S \varphi c \psi_p ds. \tag{17}$$

Учитывая (16) и (17), уравнению (14) можно придать такой вид:

$$\int_S F_p L f ds + \int_S F_p M \ddot{f} ds + \int_S \varphi c \psi_p ds + \int_V \psi_p m \ddot{\varphi} dv = 0. \tag{18}$$

Заменим в (15) и (18) функции $f$ и $\varphi$ их разложениями согласно (9)-(11). При этом краевые условия (2) и (4) удовлетворяются автоматически, а (15), (18) с учетом равенств (8), (12) и свойств ортогональности функций $F_i(r)$ и $\Phi_j(r)$ преобразуются к виду:

$$A_p \int_S F_p L F_p ds + \ddot{A}_p \int_S F_p M F_p ds + \sum_i A_i \int_S \psi_i c \psi_p ds +$$
$$+ \sum_i \ddot{A}_i \int_V \psi_p m \psi_i dv + \sum_j \ddot{a}_j \int_V \psi_p m \Phi_j dv = 0 \quad (p, i, j = 1, 2, \ldots), \tag{19}$$

$$-a_s \int_V \Phi_s \ell \Phi_s dv + \ddot{a}_s \int_V \Phi_s m \Phi_s dv + \sum_i \ddot{A}_i \int_V \Phi_s m \psi_i dv = 0 \quad (s, i = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Таким образом, взамен системы дифференциальных уравнений в частных производных (1), (3) с краевыми условиями (2) и (4) мы получили бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций времени $A_i$ и $a_j$ – (19)-(20).

Введем следующие обозначения:

$$\mu_p = \int_S F_p M F_p ds, \quad \tilde{\mu}_{pi} = \int_V \psi_p m \psi_i dv, \quad \bar{\mu}_s = \int_V \Phi_s m \Phi_s dv,$$
$$G_p = \int_S F_p L F_p ds, \quad \tilde{G}_{pi} = \int_S \psi_p c \psi_i ds, \quad \bar{G}_s = -\int_V \Phi_s \ell \Phi_s dv, \tag{21}$$
$$\alpha_{pj} = \int_V \psi_p m \Phi_j dv.$$

Вследствие (5) и (7) справедливы соотношения

$$G_p = \mu_p \omega_p^2, \tag{22}$$

$$\bar{G}_s = \mu_s \bar{\omega}_s^2. \tag{23}$$

Можно видеть, что $\tilde{\mu}_{pi} = \tilde{\mu}_{ip}$ , так как оператор $m$ симметричен (вследствие линейности и консервативности рассматриваемой системы), а $\tilde{G}_{pi} = \tilde{G}_{ip}$ согласно теореме о взаимности работ [1]. С учетом обозначений (21) уравнения (19) и (20) преобразуются к виду

$$\mu_p \ddot{A}_p + G_p A_p + \sum_i \tilde{\mu}_{pi} \ddot{A}_i + \sum_i \tilde{G}_{pi} A_i + \sum_j \alpha_{pj} \ddot{a}_j = 0 \quad (p, i, j = 1, 2, \ldots) \tag{24}$$

$$\bar{\mu}_s \ddot{a}_s + \bar{G}_s a_s + \sum_i \alpha_{is} \ddot{A}_i = 0 \qquad (s, i = 1, 2, \ldots). \tag{25}$$

Первые два слагаемые в (24) и (25) содержат приведенные массы ( $\mu_p$ , $\bar{\mu}_s$ ) и приведенные жесткости ( $G_p$ , $\bar{G}_s$ ) систем, соответствующих краевым задачам (5)-(6) и (7)-(8), которые описывают колебания изолированных рамы и мембраны. Остальные слагаемые характеризуют взаимовлияние рамы и мембраны при их совместных колебаниях. Так, третье слагаемое в (24) выражает инерционную нагрузку на колеблющуюся раму вследствие квазистатических перемещений мембраны. Четвертое слагаемое в (24) показывает статические упругие связи, налагаемые на раму мембраной. Последние слагаемые в (24) и (25) изображают инерционные связи между волновыми движениями мембраны и колебаниями рамы. Ограничивая в (24) и (25) $p$ и $s$ , $i$ и $j$ величинами $N$ и $n$ , приходим к конечной системе $N+n$ линейных дифференциальных уравнений порядка $2(N+n)$ с $N+n$ неизвестными.

Вводя в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 + \tilde{\mu}_{11} & \ldots & \tilde{\mu}_{1N} \\ \tilde{\mu}_{21} & \ldots & \tilde{\mu}_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{\mu}_{N1} & \ldots & \mu_N + \tilde{\mu}_{NN} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} G_1 + \tilde{G}_{11} & \ldots & \tilde{G}_{1N} \\ \tilde{G}_{21} & \ldots & \tilde{G}_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{G}_{N1} & \ldots & G_N + \tilde{G}_{NN} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1 & & 0 \\ & \bar{\mu}_2 \ddots & \\ 0 & & \bar{\mu}_n \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \bar{G}_1 & & 0 \\ & \bar{G}_2 \ddots & \\ 0 & & \bar{G}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \ldots & \alpha_{Nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{T}.$$

(верхний индекс "Т" означает транспонирование) и векторы

$$q = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}, \quad \bar{q} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

можем записать систему (24)-(25) в компактной матричной форме

$$\mathfrak{I} \ddot{\eta} + \mathfrak{G} \eta = 0, \tag{26}$$

где

$$\mathfrak{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{A} \\ \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{M}} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{K}} \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix}.$$

Матрицы $\mathfrak{J}$ и $G$ симметричны. Для системы (26) может быть решена проблема собственных значений. Тем самым будут найдены соответствующие собственным частотам $\Omega_\nu$ векторы $\eta_\nu$, $q_\nu$ и $\bar{q}_\nu$, а также результирующие формы колебаний $f_\nu$ и $\psi_\nu$ по формулам (9)-(11), в которые вместо $A_i$ и $a_j$ нужно подставить компоненты $A_{i\nu}$ и $a_{j\nu}$ векторов $q_\nu$ и $\bar{q}_\nu$ соответственно.

Коэффициенты (21) линейной системы (26) при известных решениях частных задач (5)-(6), (7)-(8) и (12)-(13) вычисляются с учетом замечаний (22), (23) как скалярные произведения соответствующих функций с весом $M(\tau)$ или $m(\tau)$. Исключение составляют коэффициенты $\tilde{G}_{pi}$, которые не связаны соотношением типа (22), (23) ни с одним из инерционных коэффициентов; формула для них индивидуальна. Для вычисления $\tilde{G}_{pi}$ необходимо в (21) подставить явное выражение оператора $C$.

Так, например, в предположении изотропности мембраны можно получить следующие формулы:

$$\tilde{G}_{pi}=\int\limits_S \psi_p C \psi_i\, ds=\int\limits_V [h\lambda(\nabla\xi_p)(\nabla\xi_i)+2hG(\nabla\xi_{px}\cdot\nabla\xi_{ix}+ \\ +\nabla\xi_{py}\cdot\nabla\xi_{iy})-hG(\nabla\times\xi_p)(\nabla\times\xi_i)+ \\ +T\nabla\eta_p\cdot\nabla\eta_i]\,dv, \tag{27}$$

$$\bar{G}_s=-\int\limits_V \Phi_s \ell \Phi_s\, dv= \\ =\int\limits_V\{h\lambda(\nabla u_s)^2+2hG[(\nabla u_{sx})^2+(\nabla u_{sy})^2]- \\ -hG(\nabla\times u_s)^2+T(\nabla w_s)^2\}\,dv, \tag{28}$$

где $\nabla=i_x\frac{\partial}{\partial x}+i_y\frac{\partial}{\partial y}$ – оператор Гамильтона; $h$ – толщина мембраны; $G$, $\lambda$ – упругие постоянные Ляме материала мембраны; $T$ – натяжение мембраны; $\xi_p$, $\xi_i$ – трансверсальные составляющие векторов $\psi_p$ и $\psi_i$ соответственно; $\eta_p$, $\eta_i$ – нормальные составляющие векторов $\psi_p$ и $\psi_i$; $w_s$, $u_s$ – нормальная и трансверсальная составляющие вектора $\Phi_s$; $\xi_{px}$, $\xi_{py}$ – ортогональные проекции вектора $\xi_p$; $\xi_{ix}$, $\xi_{iy}$ – ортогональные проекции вектора $\xi_i$; $u_{sx}$, $u_{sy}$ – ортогональные проекции вектора $u_s$.

Мы получили формулы для вычисления всех коэффициентов, входящих в (26). Получая $\Phi_s$ численным интегрированием (7), следует вместо (28) использовать (23) для уменьшения объема вычислений и повышения точности, так как при численном интегрировании уравнений колебаний функции перемещений получаются, как правило, с меньшими погрешностями, чем их производные.

Таким образом, исходная задача о собственных колебаниях тяжелой упругой рамы, несущей на себе тяжелую мембрану, сведена к обобщенной проблеме собственных значений для линейной системы (26). Коэффициенты этой системы вычисляются с помощью квадратур от функций, являющихся решениями трех вспомогательных краевых задач: первой - о собственных колебаниях рамы без мембраны (5)-(6), второй - о собственных колебаниях мембраны с жестким контуром (7)-(8), третьей - о статической деформации мембраны при заданной деформации ее опорного контура, определяемой собственными функциями первой задачи (I2)-(I3). Все рабочие уравнения (5)-(I3), (26) предложенного метода и формулы для вычисления их коэффициентов (2I)-(23) носят общий характер. При его фактической реализации могут появиться вариации вследствие зависимости структуры операторов $C$ и $\ell$ от упругих характеристик и натяжения мембраны по разным направлениям. Это отразится на уравнениях (7) и (I2) и на формулах для $\tilde{б}_{pi}$ и $\bar{б}_{s}$ из (2I), а также на выражениях (27) и (28).

## Литература

I. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., "Наука", I975.

2. Cherchas D.B. Attitude Stability and Performance of a Dual-Spin Satellite with Large Flexible Appendages. Universiti of Toronto, Institute for Aerospace Studies, Report N: 170, 1971.

3. Hughes P.C. Attitude dynamics of a three-axis stabilized Satellite with a large flexible solar array. AIAA Paper, N: 857, 1972.