ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 4, 1978

УДК 539.4:629.7.02

Б.И.Сахаров, А.Х.Якубов

РАСЧЕТ АВИАЦИОННЫХ КОРОБЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ УСЛОВНО-ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Коробчатые конструкции получили широкое распространение в авиационной технике. В работе рассматривается расчет элементов открытого с торцов отсека, выполненного в виде коробчатой конструкции прямоугольного сечения. Стенки отсека соединены между собой достаточно жесткими силовыми шпангоутами, обеспечивающими неизменность прямого угла соединения стенок. Сами стенки подкреплены продольными и поперечными ребрами, что позволяет рассматривать их как ортотропные пластинки нерегулярной в общем случае формы. Отсек нагружен внутренним равномерным давлением.

Расчет отсека проводится условно-экстремальным методом в сочетании с конечно-разностным подходом [1], [3]. Для использования этого метода при статическом расчете составляется выражение потенциальной энергии отдельных элементов и ставятся условия на границе соединения элементов, а также дополнительные условия по полю элементов, если в этом есть необходимость. Условие минимума общей энергии системы, которое отвечает напряженному состоянию конструкции, приводит к решению задачи на условный экстремум методом неопределенных множителей Лагранжа.

Конечно-разностная аппроксимация потенциальной энергии деформации пластинки имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{N}\Big[D_1\Big(\frac{w_{i-1,j}-2w_{i,j}+w_{i+1,j}}{h_x^2}\Big)^2 + 2D_1\nu\Big(\frac{w_{i-1,j}-2w_{i,j}+w_{i+1,j}}{h_x^2}\Big)\times$$

$$\times\left(\frac{w_{i,j-1}-2w_{i,j}+w_{i,j+1}}{h_y^2}\right)+D_2\left(\frac{w_{i,j-1}-2w_{i,j}+w_{i,j+1}}{h_y^2}\right)^2+$$

$$+4D_к\left(\frac{w_{i+1,j+1}-w_{i+1,j-1}-w_{i-1,j+1}+w_{i-1,j-1}}{4h_xh_y}\right)^2\Big]h_xh_y\,, \qquad (I)$$

где D_1, D_2, $D_к$ – жесткости пластинки [4], ν – коэффициент Пуассона, h_x, h_y – шаги сетки вдоль осей x, y; (i, j) – текущий узел сеточной области; N, M – количество узлов сеточной области вдоль осей x, y соответственно.

Постановка граничных условий сводится к следующему. В случае ортогонального соединения стенок на грани их

$$M_{x_1}=M_{x_2}\,,$$

где X_1, X_2 – соответствующие оси в ортогональных пластинках. На свободном крае (в торце отсека)

$$Q_{y_1}=-\frac{\partial M_{x_1y_1}}{\partial x_1}\,,\qquad M_{y_1}=0.$$

Конечно-разностная аппроксимация этих выражений имеет вид:

$$f_{1i}^{(t)}=\frac{1}{2h_y^3}\left(w_{i,2}^{(t)}-2w_{i,1}^{(t)}+2w_{i,-1}^{(t)}-w_{i,-2}^{(t)}\right)-$$

$$-\frac{2-\nu}{2h_x^2h_y}\left(w_{i+1,1}^{(t)}-2w_{i,j+1}^{(t)}+w_{i+1,-1}^{(t)}-w_{i-1,1}^{(t)}+2w_{i-1,0}^{(t)}-w_{i-1,-1}^{(t)}\right)=0, \qquad (2)$$

$$f_{2i}^{(t)}=w_{i,-1}-2w_{i,0}+w_{i+1,0}+\nu\left(w_{i-1,0}-2w_{i,0}+w_{i+1,0}\right)=0. \qquad (3)$$

Здесь верхний индекс t = I, 2, 3, 4 – номер пластинки (стенки отсека), для которой формулируется условие, нижние индексы (–I) и (–2) означают, что в условия введены законтурные точки, так что свободной консоли, продолженной за край пластинки, соответствуют выражения

$$w_{i,-1}=2w_{i,0}-w_{i,1}\,,\qquad w_{i,-2}=3w_{i,0}-2w_{i,1}\,.$$

Условие сопряжения пластинок имеет вид

$$f_{3i}^{(t)}=D_1^{(t)}\left[\left(w_{-1,j}^{(t)}-2w_{0,j}^{(t)}+w_{1,j}^{(t)}\right)+\nu\left(w_{0,j+1}^{(t)}-2w_{0,j}^{(t)}+w_{0,j-1}^{(t)}\right)\right]-$$

$$-D_1^{(t+1)}\left[\left(w_{-1,j}^{(t+1)}-2w_{0,j}^{(t+1)}+w_{1,j}^{(t+1)}\right)+\nu\left(w_{0,j+1}^{(t+1)}-2w_{0,j}^{(t+1)}+w_{0,j-1}^{(t+1)}\right)\right]=0. \qquad (4)$$

Причем ввиду неизменности прямого угла в точках сопряжения пластинок для законтурных точек $w_{-1,j} = 0$.

Следуя методу множителей Лагранжа, образуем функционал

$$F = \sum_{t=1}^{4} \Big(\Pi^{(t)} + \sum_{i=0}^{M} \sum_{j=0}^{N} q\, w_{i,j} h_x h_y + \Big(\sum_{i=1}^{M-1} f_{1i}^{(t)} \lambda_{1i}^{(t)} + \sum_{i=1}^{M-1} f_{2i}^{(t)} \lambda_{2i}^{(t)} + \sum_{j=1}^{N-1} f_{3j}^{(t)} \lambda_{3j}^{(t)} \Big) h_x h_y \Big).$$

Взяв частные производные по $w_{i,j}$ для всех внутренних точек пластинки, а также по всем λ, в соответствии с условно-экстремальным методом получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} \Delta & B' \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ \Gamma \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & & 0 \\ & \Delta_2 & & \\ & & \Delta_3 & \\ 0 & & & \Delta_4 \end{pmatrix}; \qquad \Delta_1 = \begin{pmatrix} \delta_{11}^{(1)} & \delta_{12}^{(1)} & \dots & \delta_{1,M-1}^{(1)} \\ \delta_{21}^{(1)} & \delta_{22}^{(1)} & \dots & \delta_{2,M-1}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{N-1,1}^{(1)} & \delta_{N-1,2}^{(1)} & \dots & \delta_{N-1,M-1}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Здесь B - матрица коэффициентов, образуемых дополнительными условиями при вычислении $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_{1,i}^{(t)}}$;

$$\Lambda = (\{\lambda_{1i}^{(t)}\}, \{\lambda_{2i}^{(t)}\}, \{\lambda_{3i}^{(t)}\}),\ t = 1, 2, 3, 4 \ -$$

вектора неизвестных;

$P = \{q\}$ - вектор нагрузки;

Γ - вектор, образованный за счет свободных членов на основании (2)-(4), поскольку некоторые прогибы на границе в общем случае могут быть заданы.

Через $\delta_{i,j}$ обозначены коэффициенты при $w_{i,j}$ в выражении

$$\frac{\partial F}{\partial w_{i,j}} = \frac{D_1}{h_x^4} (w_{i-2,j} - 4w_{i-1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i+1,j} + w_{i+2,j}) +$$

$$+ \frac{2D_3}{h_x^2 h_y^2} (4w_{i,j} - 2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j-1}) +$$

$$+ \frac{D_2}{h_y^4} (w_{i,j-2} - 4w_{i,j-1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}).$$

У приграничных узлов эти выражения выглядят иначе за счет учета законтурных точек в пластинке, свободно опертой по контуру на торце отсека. Свободное опирание рассмотрено в связи с последующим учетом в условиях $f_{1i}^{(t)}$ и $f_{2i}^{(t)}$ действительного опирания. Расчет пластинки с двумя свободно опертыми и двумя защемленными краями, называемой в дальнейшем основной, существенно упрощается.

Эффективности решения системы (5) способствуют два обстоятельства: матрица Δ имеет блочную структуру и $\Delta_1 = \Delta_3$; $\Delta_2 = \Delta_4$, так что

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_1^{-1} & & & 0 \\ & \Delta_2^{-1} & & \\ & & \Delta_1^{-1} & \\ 0 & & & \Delta_2^{-1} \end{pmatrix}$$

Умножив (5) слева на $\begin{pmatrix} \Delta^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ и полагая

$$W = W_1 + W_0 ,$$

получим

$$\begin{pmatrix} E & \Delta^{-1} \cdot B^{-1} \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 + W_0 \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_0 \\ \Gamma \end{pmatrix} ,$$

где W_0 - решение системы, $\Delta W_0 = P$ для основных пластинок, а W_1 - неизвестные.

Из этого уравнения следует

$$\begin{cases} W_1 + \Delta^{-1} B' \Lambda = 0 \\ B W_1 + B W_0 = \Gamma , \end{cases}$$

откуда $\Lambda = (B\Delta^{-1}B')^{-1}(BW_0 - \Gamma)$; $W = -\Delta^{-1}B'\Lambda$.

Следует заметить, что при обращении матрицы Δ дальнейшее решение задачи будет связано с обращением матрицы $B\Delta^{-1}B'$, порядок которой определяется числом строк, которое значительно меньше числа столбцов.

Остановимся на наиболее трудоемкой процедуре обращения матрицы Δ, точнее матриц Δ_1 и Δ_2. Получить матрицу Δ_1^{-1}, например, можно, решая уравнение $\Delta_1 W_0^{(1)} = E$, физический смысл которого состоит в следующем. Пусть пластинка поочередно загружается поперечной единичной нагрузкой в каждом узле сетки. Тогда нагрузка в точке (I,I) определит поле прогибов, которое будет первым столбцом матрицы Δ_1^{-1}, а нагрузка в точке (I,2) определит

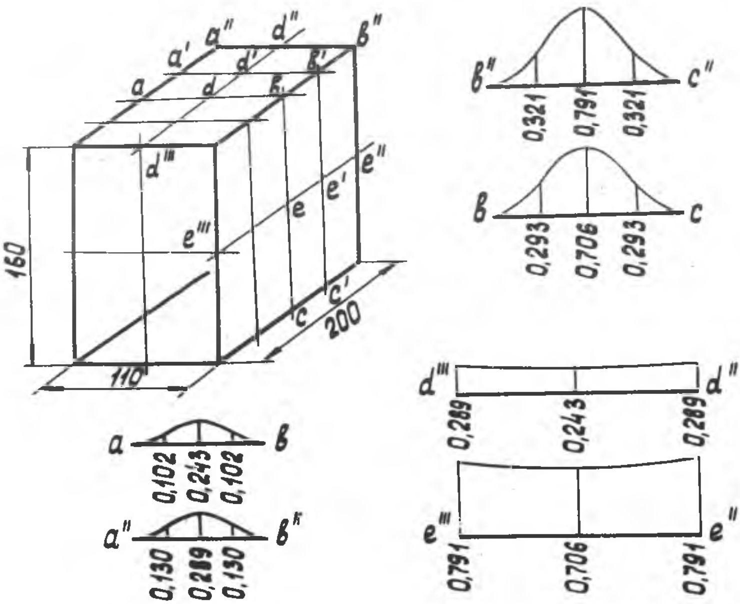
a
a'
a''
d
d'
d''
в
в'
в''
d'''
e''
e'
e
e'''
160
c
c'
200
110
в''
c''
0,321
0,791
0,321
в
c
0,293
0,706
0,293
a
в
0,102
0,243
0,102
a''
в''
0,130
0,289
0,130
d'''
d''
0,289
0,243
0,289
e'''
e''
0,791
0,706
0,791

Рис. I

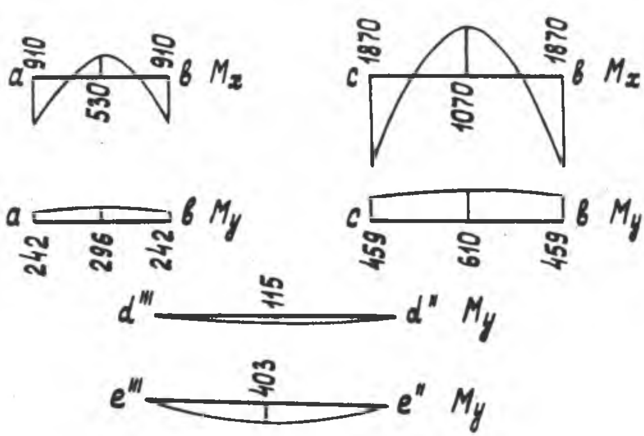
a
910
910
в
M_x
530
c
1870
1870
в
M_x
1070
a
в
M_y
242
296
242
c
в
M_y
459
610
459
d'''
115
d''
M_y
e'''
403
e''
M_y

Рис. 2

второй столбец и т.д.

В случае простых граничных условий расчет основной пластинки легко проводится с помощью продольно-поперечной прогонки [2], [3]. Решение задачи облегчается за счет того, что поля прогибов от нагрузок в соседних узлах мало отличаются, и требуется одна-две итерации для корректировки поля прогибов. Использование близости полей прогибов приводит к следующей последовательности перебора нагрузки:

$$i=1,\ j=1,2,\ldots,N-1;\quad i=2,\ j=M-1,\ M-2,\ldots,\ 1 \quad \text{и т.д.}$$

Эта процедура позволяет значительно сэкономить время обращения. Дополнительно время счета и память ЭВМ экономятся за счет симметрии, поскольку для данной задачи требуется помещать нагрузку для основной пластинки лишь в четверти узлов сетки.

На основе рассмотренного подхода была составлена программа на языке ФОРТРАН для ЭВМ ЕС-1020 с использованием библиотеки программ, прилагаемых к транслятору.

В качестве примера был рассчитан отсек, загруженный равномерно распределенной внутренней нагрузкой q = I кг/см^2 (рис. I). Величины жесткостей составляли для боковых панелей (кгсм) $D_1 = 2\cdot 10^6$; $D_2 = 0,8\cdot 10^6$; $D_3 = 2,28\cdot 10^6$; для верхней и нижней панелей $D_1 = 1,2\cdot 10^6$; $D_2 = 0,4\cdot 10^6$; $D_3 = 2,28\cdot 10^6$. Результаты расчета представлены эпюрами прогибов (рис. I) и изгибающих моментов (рис. 2).

Литература

I. Резников Р.А. Решение задач строительной механики на ЭЦМ. М., Стройиздат, 1971.

2. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, "Наука", 1967.

3. Якубов А.Х. Некоторые вопросы расчета мотогондол. Труды Ташкентского политехнического института, 1977.

4. Огибалов П.М. Изгиб, устойчивость и колебание пластинок, М., издательство МГУ, 1958.