ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 5, 1979

УДК 629.7:539.3:624.074.4

Л.М.Савельев

ПРОСТОЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ

Непосредственное применение конечных элементов изопара- рического типа к расчету тонких пластин и оболочек оказывает затруднительным из-за влияния ложных деформаций поперечно сдвига, следствием которого является чрезмерная жесткость по ных элементов [1]. Эффективным способом борьбы с ложными сдви оказалось понижение порядка интегрирования до минимально доп тимого при вычислении вклада деформаций поперечного сдвига матрицу жесткости. На этом пути удалось построить весьма про четырехугольный конечный элемент пластины при изгибе [2], затем и конечный элемент оболочки вращения [3]; по точности элементы сравнимы с наиболее сложными из имеющихся элементов. В данной статье тот же подход применяется к построению четыр узлового конечного элемента произвольной тонкой оболочки. Каж узел имеет шесть степеней свободы - три перемещения и три у поворота.

Рассмотрим сначала произвольную поверхность, заданную параметрической форме $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$, $z = z(\xi,\eta)$. Возьмем на поверхности две близкие точки (ξ,η) и $(\xi + d\xi,\ \eta + d\eta$ обозначим через

$$d\vec{R} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta\right)\vec{e}_z$$

соединяющий их вектор. Здесь $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ - единичные векторы, направленные по координатным осям.

Длина ds вектора $d\vec{R}$ определится равенством

$$ds^2 = A_\xi^2 d\xi^2 + 2A_\xi A_\eta \gamma\, d\xi\, d\eta + A_\eta^2 d\eta^2,$$

$$A_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}\,,$$

$$A_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2}\,,$$

$$\gamma = \frac{1}{A_\xi A_\eta}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right). \tag{3}$$

Возьмем два взаимно перпендикулярных вектора $d\vec{R}_1$, $d\vec{R}_2$, касательных к поверхности. Вектор $d\vec{R}_1$ получим, полагая в (I) $d\eta = 0$, а $d\vec{R}_2$ определим из условия $d\vec{R}_1 \cdot d\vec{R}_2 = 0$. В итоге получим

$$d\vec{R}_1 = \vec{e}_\xi A_\xi \, d\xi\,, \qquad d\vec{R}_2 = (\vec{e}_\eta - \gamma \vec{e}_\xi) A_\eta \, d\eta\,, \tag{4}$$

где обозначено

$$\vec{e}_\xi = \lambda_{\xi x}\vec{e}_x + \lambda_{\xi y}\vec{e}_y + \lambda_{\xi z}\vec{e}_z\,,$$

$$\vec{e}_\eta = \lambda_{\eta x}\vec{e}_x + \lambda_{\eta y}\vec{e}_y + \lambda_{\eta z}\vec{e}_z\,, \tag{5}$$

$$\lambda_{\xi x} = \frac{1}{A_\xi}\frac{\partial x}{\partial \xi}\,, \qquad \lambda_{\eta x} = \frac{1}{A_\eta}\frac{\partial x}{\partial \eta}\,. \tag{6}$$

Параметры $\lambda_{\xi y}$, $\lambda_{\xi z}$, $\lambda_{\eta y}$, $\lambda_{\eta z}$ получаются из (6) соответствующей заменой x на y или z. Длины ds_1, ds_2 векторов dR_1, dR_2 равны

$$ds_1 = A_\xi \, d\xi\,, \qquad ds_2 = A_\eta \sqrt{1-\gamma^2}\, d\eta\,. \tag{7}$$

Введем еще вектор $\vec{e}_3$ единичной длины, нормальный к поверхности:

$$\vec{e}_3 = \frac{d\vec{R}_1 \times d\vec{R}_2}{ds_1\, ds_2} = \theta_x \vec{e}_x + \theta_y \vec{e}_y + \theta_z \vec{e}_z\,. \tag{8}$$

Здесь

$$\theta_x = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left(\lambda_{\xi y}\lambda_{\eta z} - \lambda_{\xi z}\lambda_{\eta y}\right), \tag{9}$$

а θ_y и θ_z получаются из (9) с помощью круговой замены x, y, z.

Пусть далее точки поверхности получают малые перемещения $u_x(\xi,\eta)$, $u_y(\xi,\eta)$, $u_z(\xi,\eta)$ по направлению координатных осей. Декартовы координаты x^*, y^*, z^* деформированной поверхности будут

$$x^* = x + u_x\,, \qquad y^* = y + u_y\,, \qquad z^* = z + u_z\,.$$

Заменяя в (3) x, y, z на x^*, y^*, z^*, с точностью до квадратов малых величин получим для деформированной поверхности

$$A_\xi^* = A_\xi(1+\varepsilon_\xi)\,, \qquad A_\eta^* = A_\eta(1+\varepsilon_\eta)\,, \qquad \gamma^* = \gamma + \varepsilon_{\xi\eta}\,, \tag{10}$$

где

$$\varepsilon_\xi = \frac{1}{A_\xi}\lambda_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_\eta = \frac{1}{A_\eta}\lambda_\eta \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \varepsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{A_\xi}\lambda_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{A_\eta}\lambda_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta}, \tag{II}$$

$$\lambda_\xi = [\lambda_{\xi x} \;\; \lambda_{\xi y} \;\; \lambda_{\xi z}], \quad \lambda_\eta = [\lambda_{\eta x} \;\; \lambda_{\eta y} \;\; \lambda_{\eta z}],$$

$$u = [u_x \;\; u_y \;\; u_z]^T. \tag{I2}$$

Деформированные векторы $d\vec{R}_1^*$, $d\vec{R}_2^*$ будут равны

$$d\vec{R}_1^* = d\vec{R}_1 + \vec{\rho}_\xi A_\xi d\xi, \quad d\vec{R}_2^* = d\vec{R}_2 + (\vec{\rho}_\eta - \gamma\vec{\rho}_\xi) A_\eta d\eta, \tag{I3}$$

где

$$\vec{\rho}_\xi = \frac{1}{A_\xi}\left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi}\vec{e}_x + \frac{\partial u_y}{\partial \xi}\vec{e}_y + \frac{\partial u_z}{\partial \xi}\vec{e}_z\right),$$

$$\vec{\rho}_\eta = \frac{1}{A_\eta}\left(\frac{\partial u_x}{\partial \eta}\vec{e}_x + \frac{\partial u_y}{\partial \eta}\vec{e}_y + \frac{\partial u_z}{\partial \eta}\vec{e}_z\right). \tag{I4}$$

Вычислив длины ds_1^*, ds_2^* векторов $d\vec{R}_1^*$, $d\vec{R}_2^*$, найдем нормальные деформации

$$\varepsilon_{11} = \frac{ds_1^* - ds_1}{ds_1}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{ds_2^* - ds_2}{ds_2},$$

а по формуле

$$\varepsilon_{12} = \frac{d\vec{R}_1^* \cdot d\vec{R}_2^*}{ds_1^* \cdot ds_2^*}$$

определим деформацию сдвига. Учитывая малость величин ε_ξ, ε_η, $\varepsilon_{\xi\eta}$, приходим к соотношениям

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\eta \\ \varepsilon_{\xi\eta} \end{bmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} & \frac{1}{1-\gamma^2} & -\frac{\gamma}{1-\gamma^2} \\ \frac{-2\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \end{bmatrix}. \tag{I5}$$

Найдем, наконец, изменения углов ω_1, ω_2 между вектором $\vec{e}_3$ и векторами $d\vec{R}_1$, $d\vec{R}_2$:

$$\omega_1 = \frac{\vec{e}_3 \cdot d\vec{R}_1^*}{ds_1^*} = \omega_\xi, \qquad \omega_2 = \frac{\vec{e}_3 \cdot d\vec{R}_2^*}{ds_2^*} = \frac{\omega_\eta - \gamma\omega_\xi}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \tag{I6}$$

где

$$\omega_\xi = \frac{1}{A_\xi}\theta\frac{\partial u}{\partial \xi}, \qquad \omega_\eta = \frac{1}{A_\eta}\theta\frac{\partial u}{\partial \eta}, \tag{I7}$$

$$\theta = [\theta_x \;\; \theta_y \;\; \theta_z]. \tag{I8}$$

Рассмотрим теперь четырехсторонний конечный элемент с узлами в вершинах. Пусть x_i, y_i, z_i – координаты типового узла (i = I, 2, 3, 4), h – толщина элемента. Положение текущей точки срединной поверхности определим соотношениями

$$x = \sum N_i x_i , \quad y = \sum N_i y_i , \quad z = \sum N_i z_i , \tag{I9}$$

где

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta). \tag{20}$$

Здесь ξ , η – безразмерные координаты, изменяющиеся от –I до I, а ξ_i , η_i – их узловые значения, равные ±I. Суммирование в (I9) выполняется по всем четырем узлам элемента. В качестве узловых перемещений возьмем смещения узлов u_{xi} , u_{yi} , u_{zi} и повороты нормали ϑ_{xi} , ϑ_{yi} , ϑ_{zi} относительно координатных осей; матрицу перемещений типового узла обозначим через $\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{v}_i = [u_{xi}\ u_{yi}\ u_{zi}\ \vartheta_{xi}\ \vartheta_{yi}\ \vartheta_{zi}]^T .$$

Рассмотрим далее слой оболочки на расстоянии ζ от срединной поверхности; отсчет ζ будем вести в положительном направлении вектора $\vec{e}_3$. Все величины, относящиеся к этому слою, будем помечать дополнительным верхним индексом ζ . Для тонких оболочек можно геометрию любого слоя отождествить с геометрией срединной поверхности, т.е. положить $A_\xi^\zeta = A_\xi$, $A_\eta^\zeta = A_\eta$, $\gamma^\zeta = \gamma$.

Возьмем точку, расположенную в i -том узле на расстоянии ζ от срединной поверхности. Перемещения этой точки, обусловленные поворотом нормали, определятся вектором $\vec{\vartheta}_i \times \zeta \vec{e}_3$, где $\vec{\vartheta}_i = \vartheta_{xi}\vec{e}_x + \vartheta_{yi}\vec{e}_y + \vartheta_{zi}\vec{e}_z$. Отсюда можно получить следующую связь между $\mathbf{u}_i^\zeta = [u_{xi}^\zeta\ u_{yi}^\zeta\ u_{zi}^\zeta]^T$ и $\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{u}_i^\zeta = (\mathbf{L}_0 + \zeta \mathbf{L}_{1i})\mathbf{v}_i , \tag{2I}$$

где

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{L}_{1i} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&\theta_{zi}&-\theta_{yi} \\ 0&0&0&-\theta_{zi}&0&\theta_{xi} \\ 0&0&0&\theta_{yi}&-\theta_{xi}&0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Примем, что перемещения $\mathbf{u}^\zeta$ в пределах элемента определяются равенствами

$$u_x^\zeta = \sum N_i u_{xi}^\zeta , \quad u_y^\zeta = \sum N_i u_{yi}^\zeta , \quad u_z^\zeta = \sum N_i u_{zi}^\zeta . \tag{23}$$

По формулам (II), (I5) находим деформации $\varepsilon^* = [\varepsilon_{11}^\zeta\ \varepsilon_{22}^\zeta\ \varepsilon_{12}^\zeta]^T$ слоя оболочки:

$$\varepsilon^* = \sum \mathbf{B}_i \mathbf{v}_i , \tag{24}$$

где

$$\mathbf{B}_i = \Gamma \mathbf{g}_i (\mathbf{L}_0 + \zeta \mathbf{L}_{1i}), \tag{25}$$

$$g_i = \frac{1}{A_\xi}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\begin{bmatrix} \lambda_\xi \\ 0 \\ \lambda_\eta \end{bmatrix} + \frac{1}{A_\eta}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_\eta \\ \lambda_\xi \end{bmatrix}.$$

Напряжения $\sigma^* = [\sigma_{11}^\zeta \; \sigma_{22}^\zeta \; \sigma_{12}^\zeta]^T$ связаны с ε^* законом Гука $\sigma^* = C^* \varepsilon^*$, где

$$C^* = \frac{E}{1-\mu^2} C, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}.$$

Обозначим через K_ε вклад деформаций ε^* в матрицу жестк… элемента. Типовая подматрица $K_{ij,\varepsilon}$ может быть найдена по фо…

$$k_{ij,\varepsilon} = \int_{V^e} B_i^T C^* B_j \, dV \quad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

где интегрирование ведется по объему V^e конечного элемента. … лагая $dV = ds_1 ds_2 d\zeta = A_\xi A_\eta \sqrt{1-\gamma^2}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$ и выполняя интегрирова… по толщине оболочки, приведем выражение для $k_{ij,\varepsilon}$ к виду

$$k_{ij,\varepsilon} = k_{ij,T} + k_{ij,D},$$

где матрицы $k_{ij,T}$ и $k_{ij,D}$ равны

$$k_{ij,T} = T L_0^T \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_i^T \Gamma^T C \Gamma g_j A_\xi A_\eta \sqrt{1-\gamma^2}\, d\xi\, d\eta\, L_0,$$

$$k_{ij,D} = D L_{1i}^T \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g_i^T \Gamma^T C \Gamma g_j A_\xi A_\eta \sqrt{1-\gamma^2}\, d\xi\, d\eta\, L_{1j}.$$

Здесь $T = Eh/(1-\mu^2)$ и $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ – жесткости оболочки на ра… жение и изгиб. Интегрирование в (29) можно выполнить по прав… Гаусса, взяв по 2 точки для каждой из переменных ξ , η .

Найдем далее деформации поперечного сдвига $\tilde{\varepsilon} = [\varepsilon_{12} \varepsilon_{13}]^T$. Сч… тая их постоянными по толщине, будем иметь

$$\varepsilon_{13} = \vartheta_1 + \omega_1, \quad \varepsilon_{23} = \vartheta_2 + \omega_2,$$

где ϑ_1 , ϑ_2 – углы поворота нормали в направлениях $d\vec{R}_1$, $d\vec{R}_2$ Полагая

$$\vartheta_x = \sum N_i \vartheta_{xi}, \quad \vartheta_y = \sum N_i \vartheta_{yi}, \quad \vartheta_z = \sum N_i \vartheta_{zi}$$

и проектируя вектор $\vec{\vartheta} = \vartheta_x \vec{e}_x + \vartheta_y \vec{e}_y + \vartheta_z \vec{e}_z$ на направления $d\vec{R}_1$, $d\vec{R}_2$, можно выразить ϑ_1 , ϑ_2 через v_i . Учитывая также (16), (17), запишем

$$\tilde{\varepsilon} = \sum \tilde{B}_i v_i,$$

где

$$\tilde{B}_i = N_i \tilde{L} + \tilde{\Gamma} \tilde{g}_i L_0,$$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}(\lambda_\eta - \gamma \lambda_\xi) \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_\xi \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{g}_i = \frac{1}{A_\xi}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\begin{bmatrix}\theta \\ 0\end{bmatrix} + \frac{1}{A_\eta}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\begin{bmatrix}0 \\ \theta\end{bmatrix}. \qquad (32)$$

По формуле

$$k_{ij,G} = \int_{V^e} \tilde{G}\,\tilde{B}_i^T \tilde{B}_j \, dV$$

...одим вклад деформаций сдвига в типовую подматрицу матрицы ...ткости. Здесь $\tilde{G} = \frac{5}{6} G$, где G – модуль сдвига материала обо...чки. Коэффициент $5/6$ введен для учета действительного нерав...мерного распределения деформаций поперечного сдвига по толщине ...лочки. Выполнив интегрирование по ζ, получим

$$k_{ij,G} = \tilde{G} h \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \tilde{B}_i^T \tilde{B}_j A_\xi A_\eta \sqrt{1-\gamma^2}\, d\xi\, d\eta. \qquad (33)$$

Здесь при интегрировании следует взять одну точку Гаусса, ...о соответствует минимально допустимому порядку интегрирования. ...к уже упоминалось выше, это необходимо для исключения ложных ...нитов.

Суммируя отдельные вклады, получим окончательно следующую ...рмулу для вычисления типового блока k_{ij}^e матрицы жесткости ...емента:

$$k_{ij}^e = k_{ij,T} + k_{ij,D} + k_{ij,G}. \qquad (34$$

Литература

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., ...ир", 1975.

2. Hughes T.J.R., Taylor R.L., Kanoknulchai W. A simple and efficient finite element for plate bending. „Int. J. Numer. Meth. Eng.", 1977, 11, N10, 1529-1543.

3. Zienkiewicz O.C., Bauer J., Morgan K., Onate E. A simple and efficient element for axisymmetric shells. „Int. J. Numer. Meth. Eng.", 1977, 11, N10, 1545-1558.