ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 4, 1978

УДК 629.735.33.015.4

Е.К.Липин, В.С.Литвинов

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ МИНИМАЛЬНОЙ МАССЫ

Рассмотрим задачу минимизации объема материала конструкции с ограничениями по прочности в виде неравенств, не забывая о наличии других ограничений - по устойчивости, технологичности и т.д. Сложную силовую конструкцию будем представлять в виде совокупности элементов H, F, T [1], где H - обшивка, F - пояса силовых элементов, T - стенки, проектными параметрами которых являются: $\{h\}$ - толщина обшивки, $\{f\}$ - площади поясов, $\{t\}$ - толщины стенок.

Целевая функция в виде объема материала конструкции, в которой силовые элементы H, F, T представляют собой конечное число областей $\{S\}$, $\{\Omega\}$ и участков $\{\ell\}$, имеет выражение

$$V=\sum_{k=1}\int_{S_k} h_k\, ds_k+\sum_{p=1}\int_{\ell_p} f_p\, dz_p+\sum_{n=1}\int_{\Omega_n} t_n\, d\Omega_n . \qquad (1)$$

Надежная работа элементов H, F, T в процессе эксплуатации обеспечивается при проектировании удовлетворением ограничений по прочности, которые по энергетической теории предельных состояний будут иметь вид:

$$\left\{\frac{N^2}{2Eh^2}\right\}\le\left\{\frac{G^2}{2E}\right\},\quad \left\{\frac{\bar N^2}{2\bar E f^2}\right\}\le\left\{\frac{\bar G^2}{2\bar E}\right\},\quad \left\{\frac{\tilde N^2}{2\tilde E t^2}\right\}\le\left\{\frac{\tilde G^2}{2\tilde E}\right\}, \qquad (2)$$

где $\{N\}$, $\{\tilde N\}$, $\{\bar N\}$ - распределенные усилия в элементах H, T и сосредоточенные усилия в элементах F; $\{E\}$, $\{\bar E\}$, $\{\tilde E\}$; $\{G\}$, $\{\bar G\}$, $\{\tilde G\}$ - модули упругости и допускаемые напряжения по прочности для элементов H, F, T.

Условия минимума целевой функции (I) при наличии ограничений (2) получим методами классического вариационного исчисления при замене неравенств равенствами, вводя новые переменные $\{\alpha\}, \{\bar{\alpha}\}, \{\tilde{\alpha}\}$:

$$\{\varphi\} = \left\{\frac{1}{2E}\left(\sigma^2 - \frac{N^2}{h^2}\right) - \frac{1}{2}\alpha^2\right\} = \{0\},$$

$$\{\bar{\varphi}\} = \left\{\frac{1}{2\bar{E}}\left(\bar{\sigma}^2 - \frac{\bar{N}^2}{f^2}\right) - \frac{1}{2}\bar{\alpha}^2\right\} = \{0\},$$

$$\{\tilde{\varphi}\} = \left\{\frac{1}{2\tilde{E}}\left(\tilde{\sigma}^2 - \frac{\tilde{N}^2}{t^2}\right) - \frac{1}{2}\tilde{\alpha}^2\right\} = \{0\}. \qquad (3)$$

Для минимизации объема (I) с ограничениями (3) составим функционал Лагранжа

$$L = V + \sum_{K=1}\int_{S_K}\lambda_K\varphi_K\,ds_K + \sum_{p=1}\int_{\ell_p}\bar{\lambda}_p\bar{\varphi}_p\,dz_p + \sum_{n=1}\int_{\Omega_n}\tilde{\lambda}_n\tilde{\varphi}_n\,d\Omega_n. \qquad (4)$$

Вариационное условие минимума функционала (4) запишется следующим образом:

$$\delta L = \sum_{K=1}\int_{S_K}\left(1 + \lambda_K\frac{N_K^2}{E_K h_K^3}\right)\delta h_K\,ds_K + \sum_{p=1}\int_{\ell_p}\left(1 + \bar{\lambda}_p\frac{\bar{N}_p^2}{\bar{E}_p f_p^3}\right)\delta f_p\,dz_p +$$

$$+ \sum_{n=1}\int_{\Omega_n}\left(1 + \tilde{\lambda}_n\frac{\tilde{N}_n^2}{\tilde{E}_n t^3}\right)\delta t_n\,d\Omega_n - \sum_{K=1}\int_{S_K}\lambda_K\alpha_K\delta\alpha_K\,ds_K - \sum_{p=1}\int_{\ell_p}\bar{\lambda}_p\bar{\alpha}_p\delta\bar{\alpha}_p\,dz_p -$$

$$- \sum_{n=1}\int_{\Omega_n}\tilde{\lambda}_n\tilde{\alpha}_n\delta\tilde{\alpha}_n\,d\Omega_n - \sum_{K=1}\int_{S_K}\lambda_K\frac{\delta N_K^2}{2E_K h_K^2}\,ds_K - \sum_{p=1}\int_{\ell_p}\bar{\lambda}_p\frac{\delta\bar{N}_p^2}{2\bar{E}_p f_p^2}\,dz_p - \sum_{n=1}\int_{\Omega_n}\tilde{\lambda}_n\frac{\delta\tilde{N}_n^2}{2\tilde{E}_n t_n^2}\,d\Omega_n = 0.$$

По основной лемме вариационного исчисления при произвольных вариациях $\{\delta h\}, \{\delta f\}, \{\delta t\}; \{\delta\alpha\}, \{\delta\bar{\alpha}\}, \{\delta\tilde{\alpha}\}$ условия экстремума функционала (4) имеют вид:

$$\left\{1 + \lambda\frac{N^2}{Eh^3}\right\} = \{0\}, \quad \left\{1 + \bar{\lambda}\frac{\bar{N}^2}{\bar{E}f^3}\right\} = \{0\}, \quad \left\{1 + \tilde{\lambda}\frac{\tilde{N}^2}{\tilde{E}t^3}\right\} = \{0\},$$

$$\left\{\lambda\sqrt{\frac{1}{E}\left(\sigma^2 - \frac{N^2}{h^2}\right)}\right\} = \{0\}, \quad \left\{\bar{\lambda}\sqrt{\frac{1}{\bar{E}}\left(\bar{\sigma}^2 - \frac{\bar{N}^2}{f^2}\right)}\right\} = \{0\}, \quad \left\{\tilde{\lambda}\sqrt{\frac{1}{\tilde{E}}\left(\tilde{\sigma}^2 - \frac{\tilde{N}^2}{t^2}\right)}\right\} = \{0\}, \qquad (5)$$

$$\sum_{K=1}\int_{S_K}\lambda_K\frac{\delta N_K^2}{2E_K h_K^2}\,ds_K + \sum_{p=1}\int_{\ell_p}\bar{\lambda}_p\frac{\delta\bar{N}_p^2}{2\bar{E}_p f_p^2}\,dz_p + \sum_{n=1}\int_{\Omega_n}\tilde{\lambda}_n\frac{\delta\tilde{N}_n^2}{2\tilde{E}_n t_n^2}\,d\Omega_n = 0. \qquad (6)$$

Уравнения (3, 5) образуют совместную систему для определения проектных параметров $\{h\}, \{f\}, \{t\}$ с точностью допускаемых напряжений, множителей Лагранжа $\{\lambda\}, \{\bar{\lambda}\}, \{\tilde{\lambda}\}$ и новых переменных

$\{\alpha\}$, $\{\bar{\alpha}\}$, $\{\tilde{\alpha}\}$. Из (3, 5) следует:

$$\left\{\frac{N^2}{h^2}\right\}=\{\sigma^2\},\qquad \left\{\frac{\bar{N}^2}{f^2}\right\}=\{\bar{\sigma}^2\},\qquad \left\{\frac{\tilde{N}^2}{t^2}\right\}=\{\tilde{\sigma}^2\},$$
$$\{\alpha\}=\{0\},\qquad \{\bar{\alpha}\}=\{0\},\qquad \{\tilde{\alpha}\}=\{0\},$$
$$\{\lambda\}=\left\{-\frac{Eh}{\sigma^2}\right\},\qquad \{\bar{\lambda}\}=\left\{-\frac{\bar{E}f}{\bar{\sigma}^2}\right\},\qquad \{\tilde{\lambda}\}=\left\{-\frac{\tilde{E}t}{\tilde{\sigma}^2}\right\}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$\sum_{K=1}\int_{S_K}\frac{\delta(h_K^2\sigma_K^2)}{2h_K\sigma_K^2}ds_K+\sum_{p=1}\int_{\ell_p}\frac{\delta(f_p^2\bar{\sigma}_p^2)}{2f_p\bar{\sigma}_p^2}dz_p+\sum_{K=1}\int_{\Omega_n}\frac{\delta(t_n^2\tilde{\sigma}_n^2)}{2t_n\tilde{\sigma}_n^2}d\Omega_n=0. \tag{8}$$

Вследствие того, что допускаемые напряжения $\{\sigma\}$, $\{\bar{\sigma}\}$, $\{\tilde{\sigma}\}$ являются заданными величинами, уравнение (8) преобразуется к виду

$$\sum_{K=1}\int_{S_K}\delta h_K\,ds_K+\sum_{p=1}\int_{\ell_p}\delta f_p\,dz_p+\sum_{n=1}\int_{\Omega_n}\delta t_n\,d\Omega_n=0,$$

которое является условием минимума объема материала конструкции для оптимального решения, лежащего в точке пересечения поверхностей ограничений.

Согласно (7) в оптимальной конструкции распределение проектных параметров $\{h\}$, $\{f\}$, $\{t\}$ должно быть таким, чтобы в ее элементах H, F, T уровень напряжений был бы равен заданному допускаемыми напряжениями по прочности $\{\sigma\}$, $\{\bar{\sigma}\}$, $\{\tilde{\sigma}\}$.

Оптимальные значения параметров $\{h\}$, $\{f\}$, $\{t\}$ в соответствии с (7) будут определяться по формулам:

$$\{h\}=\left\{\frac{N}{\sigma}\right\},\qquad \{f\}=\left\{\frac{\bar{N}}{\bar{\sigma}}\right\},\qquad \{t\}=\left\{\frac{\tilde{N}}{\tilde{\sigma}}\right\}. \tag{9}$$

Так как усилия $\{N\}$, $\{\bar{N}\}$, $\{\tilde{N}\}$ в элементах статически неопределимых конструкций зависят от распределения проектных параметров, то для определения оптимальных значений $\{h\}$, $\{f\}$, $\{t\}$ необходим итерационный процесс минимизации объема материала конструкции. Предполагая, что усилия в элементах H, F, T на каждом шаге итерационного процесса не зависят от распределения проектных параметров, из (9) получим следующие формулы, управляющие итерационным процессом минимизации объема (I):

$$\{h^{(m)}\}=\left\{\frac{N^{(m-1)}}{\sigma}\right\},\quad \{f^{(m)}\}=\left\{\frac{\bar N^{(m-1)}}{\bar\sigma}\right\},\quad \{t^{(m)}\}=\left\{\frac{\tilde N^{(m-1)}}{\tilde\sigma}\right\},\qquad (10)$$

где m - номер итерации, $\{N^{(m-1)}\}, \{\bar N^{(m-1)}\}, \{\tilde N^{(m-1)}\}$ - усилия в элементах H, F, T с распределением проектных параметров $\{h^{(m-1)}\}, \{f^{(m-1)}\}, \{t^{(m-1)}\}$.

Объем материала конструкции с учетом (I0) на каждом шаге итерационного процесса будет иметь значение

$$V^{(m)}=\frac{1}{\sigma_j}\Big(\sum_{k=1}\int_{S_k}\frac{\sigma_j}{\sigma_k}N_k^{(m-1)}ds_k+\sum_{p=1}\int_{\ell_p}\frac{\sigma_j}{\bar\sigma_p}\bar N_p^{(m-1)}dz_p+\sum_{n=1}\int_{\Omega_n}\frac{\sigma_j}{\tilde\sigma_n}\tilde N_n^{(m-1)}d\Omega_n\Big),$$

где σ_j - значение допускаемого напряжения в области S_j, $\{æ\}=\frac{1}{\sigma_j}\{\sigma\}, \{\bar æ\}=\frac{1}{\sigma_j}\{\bar\sigma\}, \{\tilde æ\}=\frac{1}{\sigma_j}\{\tilde\sigma\}$ - коэффициенты, характеризующие отличие требований прочности для элементов H, F, T по отношению к аналогичным требованиям для элемента H в области S_j.

Согласно [I], [2] выражение

$$\sum_{k=1}\int_{S_k}\frac{1}{æ_k}N_k^{(m-1)}ds_k+\sum_{p=1}\int_{\ell_p}\frac{1}{\bar æ_p}N_p^{(m-1)}dz_p+\sum_{n=1}\int_{\Omega_n}\frac{1}{\tilde æ_n}N_n^{(m-1)}d\Omega_n$$

представляет собой множитель, пропорциональный изопериметрической константе в задаче минимизации энергии деформации при заданном объеме материала V_0, уменьшающийся в итерационном процессе. Тогда объем материала конструкции, начиная с $m=1$, также будет уменьшаться: $V^{(m+1)}<V^{(m)}$.

Уменьшение V будет продолжаться до тех пор, пока в элементах H, F, T не будут достигнуты заданные значения допускаемых напряжений $\{\sigma\}, \{\bar\sigma\}, \{\tilde\sigma\}$.

Литература

I. Липин Е.К. Проектирование силовых конструкций максимальной жесткости. М., Ученые записки ЦАГИ, том 6, № 4, 1975.

2. Липин Е.К. Об учете конструктивных и технологических ограничений при проектировании силовых конструкций максимальной жесткости. М. Ученые записки ЦАГИ, том.7, № 2, 1976.

3. Липин Е.К., Голован В.И., Новосельцев В.И., Литвинов В.С., Сахаров Б.И. Оптимальное проектирование силовых конструкций с учетом конструктивных ограничений. В кн.: Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сб., вып. 3, Куйбышевский авиационный институт, 1977.