ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 3, 1977

УДК 531.312

Б.А.Горлач, Н.Н.Орлов

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА ДЛЯ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В тензорном изложении выводится вариационный принцип Даламбера-Лагранжа для твердых деформируемых тел, учитывающий начальные напряжения. На зависимость между напряжениями и деформациями не накладывается никаких ограничений. Уравнение может быть использовано при решении физически и геометрически нелинейных задач методом последовательных нагружений.

Основные обозначения:

$\bar{r}$, $\bar{R}$ – радиус-вектор произвольной точки*);

$\bar{r}_s = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_s}$, $\bar{R}_s = \dfrac{\partial \bar{R}}{\partial \xi_s}$ – ковариантные базисные векторы;

$\bar{r}^s$, $\bar{R}^s$ – контравариантные базисные векторы;

$\hat{p}$, $\hat{P}$ – симметричные тензоры напряжения;

$\bar{p}$, $\bar{P}$ – поверхностные силы;

$\bar{f}$, $\bar{F}$ – массовые силы;

$\bar{a}$, $\bar{A}$ – ускорения произвольной точки тела;

ρ, P – плотности;

v, V – объемы, занимаемые телом;

s, S – поверхности, ограничивающие тело;

s_1, S_1 – части поверхности тела, на которых заданы перемещения;

s_2, S_2 – части поверхности тела, на которых заданы напряжения;

O_1, O_2 – поверхности тела в исходном состоянии, соответствующие поверхностям S_1 и S_2 в конечном состоянии;

*) Здесь и далее первое обозначение относится к исходному напряженно-деформированному состоянию, второе – к конечному.

$\nabla = \bar{r}^{s} \dfrac{\partial}{\partial \xi_s}$, $\tilde{\nabla} = \bar{R}^{s} \dfrac{\partial}{\partial \xi_s}$ – операторы Гамильтона;

$\bar{n}$, $\bar{N}$ – единичные векторы нормалей к поверхностям тела;

$\bar{u} = \bar{R} - \bar{r}$ – вектор перемещения;

$\circ$ – операция скалярного умножения;

$(\ldots)^{T}$ – операция транспонирования;

$\cap$ – операция пересечения множеств;

$\cup$ – операция объединения множеств.

Рассмотрим движение тела из исходного напряженно-деформированного состояния в конечное (рис. I).

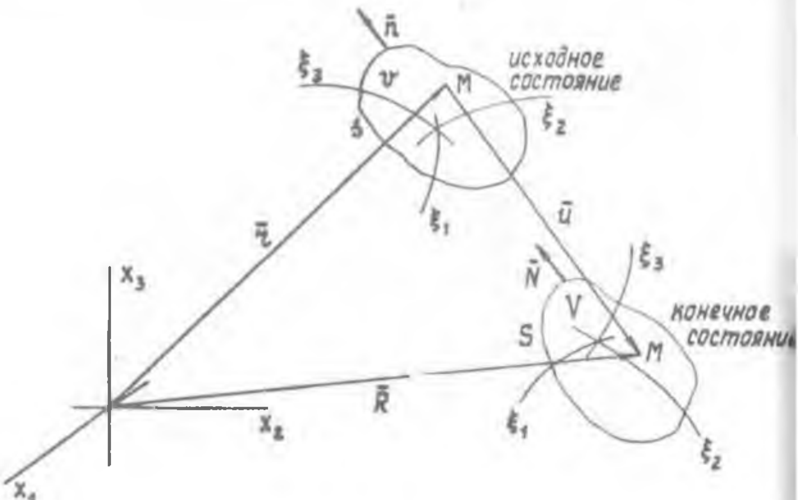

Рис. I

Пусть тело находится в равновесии в исходном положении под действием внешних сил $\bar{f}$ и $\bar{p}$. Вариационное уравнение Даламбера-Лагранжа [I] в этом случае запишется так:

$$\int_{v} [\rho(\bar{f} - \bar{a}) \circ \delta\bar{u} - \hat{P} \circ\circ \nabla \delta\bar{u}]\, dv + \int_{s_2} \bar{p} \circ \delta\bar{u}\, ds = 0. \qquad (I)$$

Под действием дополнительно приложенных массовых

$$\Delta\bar{f} = \bar{F} - \bar{f} \qquad (2)$$

и поверхностных

$$\Delta\bar{p}\,ds = \bar{P}\,dS - \bar{p}\,ds \qquad (3)$$

сил тело переходит в конечное положение. Приращение вектора ускорения $\Delta\bar{a}$ и энергетического тензора напряжения $\Delta\hat{t}$, вызванных этими силами, запишем так:

$$\Delta\bar{a} = \bar{A} - \bar{a}, \qquad (4)$$

$$\Delta\hat{t} = \hat{T} - \hat{t}, \qquad (5)$$

где $\hat{T} = \frac{\hat{P}}{P}$, $\hat{t} = \frac{\hat{p}}{\rho}$ – энергетические тензоры напряжения.

Для конечного положения вариационное уравнение Даламбера-Лагранжа имеет вид

$$\int\limits_V [\rho(\bar{F} - \bar{A})\circ\delta\bar{u} - \hat{P}\circ\circ\tilde{\nabla}\delta\bar{u}]dV + \int\limits_{S_2}\bar{P}\circ\delta\bar{u}\,dS = 0. \qquad (6)$$

Зададимся цилью перейти в выражении (6) к метрике исходного состояния. Предварительно получим некоторые вспомогательные соотношения.

Для произвольного вектора $\bar{X}$ справедливо соотношение

$$\tilde{\nabla}\bar{X} = \bar{R}^s\frac{\partial\bar{X}}{\partial\xi_s} = \bar{R}^s\bar{r}_s\circ\bar{r}^m\frac{\partial\bar{X}}{\partial\xi_m} = \bar{R}^s\frac{\partial\bar{r}}{\partial\xi_s}\circ\nabla\bar{X} = \tilde{\nabla}\bar{r}\circ\nabla\bar{X}. \qquad (7)$$

Так как $\bar{R} = \bar{r} + \bar{u}$ (см. рис. I), то

$$\tilde{\nabla}\bar{r} = \bar{R}^s\frac{\partial(\bar{R} - \bar{u})}{\partial\xi_s} = \bar{R}^s\bar{R}_s - \tilde{\nabla}\bar{u} = \hat{E} - \tilde{\nabla}\bar{u}, \qquad (8)$$

где $\hat{E}$ – единичный тензор [I].

Заменим в (7) произвольный вектор $\bar{X}$ вектором виртуальных перемещений $\delta\bar{u}$:

$$\tilde{\nabla}\delta\bar{u} = \tilde{\nabla}\bar{r}\circ\nabla\delta\bar{u}. \qquad (9)$$

Воспользовавшись законом сохранения массы тела $\rho dv = P dV$ и соотношением (9), перепишем уравнение (6) в виде

$$\int\limits_{v}\rho[(\bar{F}-\bar{A})\circ\delta\bar{u}-\hat{T}\circ\circ(\tilde{\nabla}\bar{z}\circ\nabla\delta\bar{u})]\,dv+$$

$$+\int\limits_{S_2}\bar{P}\circ\delta\bar{u}\,dS=0.$$

Используя далее (2)-(5) и (8), получим

$$\int\limits_{v}\rho\{(\bar{F}-\bar{A})\circ\delta\bar{u}-(\hat{t}+\Delta\hat{t})\circ\circ[(\hat{E}-\tilde{\nabla}\bar{u})\circ\nabla\delta\bar{u}]\}\,dv+$$

$$\int\limits_{O_2}(\bar{p}+\Delta\bar{p})\circ\delta\bar{u}\,ds=\int\limits_{v}\rho\underline{[(\bar{f}-\bar{a})\circ\delta\bar{u}-\hat{t}\circ\circ\nabla\delta\bar{u}]\,dv+}$$

$$\underline{\int\limits_{O_2}\bar{p}\circ\delta\bar{u}\,ds}+\int\limits_{v}\rho[(\Delta\bar{f}-\Delta\bar{a})\circ\delta\bar{u}+\hat{t}\circ\circ(\tilde{\nabla}\bar{u}\circ\nabla\delta\bar{u})-$$

$$-\Delta\hat{t}\circ\circ(\tilde{\nabla}\bar{z}\circ\nabla\delta\bar{u})]\,dv+\int\limits_{O_2}\Delta\bar{P}\circ\delta\bar{u}\,ds=0. \qquad (10)$$

Подчеркнутое выражение в уравнении (10) вследствие соотношения (1) запишется так:

$$\int\limits_{v}\rho[(\bar{f}-\bar{a})\circ\delta\bar{u}-\hat{t}\circ\circ\nabla\delta\bar{u}]\,dv+\int\limits_{O_2}\bar{p}\circ\delta\bar{u}\,ds=$$

$$=\int\limits_{O_2}\bar{p}\circ\delta\bar{u}\,ds-\int\limits_{s_2}\bar{p}\circ\delta\bar{u}\,ds. \qquad (11)$$

Очевидно, что

$$s_1\cup s_2=s,\qquad s_1\cap s_2=\Phi, \qquad (12)$$

$$O_1\cup O_2=s,\qquad O_1\cap O_2=\Phi, \qquad (13)$$

где Φ – пустое множество.

Тогда поверхности s_2 и O_2 согласно (12), (13) представим так:

$$O_2=O_2\cap s=O_2\cap(s_1\cup s_2)=(O_2\cap s_1)\cup(O_2\cap s_2) \qquad (14)$$

$$s_2=s_2\cap s=s_2\cap(O_1\cup O_2)=(s_2\cap O_1)\cup(O_2\cap s_2). \qquad (15)$$

Учитывая (I4), (I5), запишем

$$\int_{O_2} p \circ \delta\bar{u}\, ds = \int_{O_2 \cap s_1} \bar{p} \circ \delta\bar{u}\, ds + \int_{O_2 \cap s_2} \bar{p} \circ \delta\bar{u}\, ds \tag{I6}$$

$$\int_{s_2} p \circ \delta\bar{u}\, ds = \int_{s_2 \cap O_1} \bar{p} \circ \delta\bar{u}\, ds + \int_{O_2 \cap s_2} \bar{p} \circ \delta\bar{u}\, ds. \tag{I7}$$

На поверхности O_1 по условию заданы перемещения ($\delta\bar{u} = 0$), поэтому равенство (I7) примет вид

$$\int_{s_2} \bar{p} \circ \delta\bar{u}\, ds = \int_{O_2 \cap s_2} \bar{p} \circ \delta\bar{u}\, ds. \tag{I8}$$

Подставляя (I6), (I8) в выражение (II), получим

$$\int_{v} \rho[(\bar{f} - \bar{a}) \circ \delta\bar{u} - \hat{t} \circ\circ \nabla\delta\bar{u}]\, dv + \int_{O_2} \bar{p} \circ \delta\bar{u}\, ds =$$

$$= \int_{O_2 \cap s_1} p \circ \delta\bar{u}\, ds. \tag{I9}$$

Возвратимся к уравнению (I0). Заменяя подчеркнутое выражение одним членом (I9), перепишем (I0):

$$\int \rho[(\Delta\bar{f} - \Delta\bar{a}) \circ \delta\bar{u} + \hat{t} \circ\circ (\tilde{\nabla}\bar{u} \circ \nabla\delta\bar{u}) - \Delta\hat{t} \circ\circ (\tilde{\nabla}\bar{r} \circ \nabla\delta\bar{u})]\, dv +$$

$$\int_{s_1} \Delta p \circ \delta\bar{u}\, ds + \int_{O_2 \cap s_1} \bar{p} \circ \delta\bar{u}\, ds = 0. \tag{20}$$

Для произвольных тензоров второго ранга $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ можно доказать тождество

$$\hat{B} \circ\circ (\hat{C} \circ \hat{D}) = (\hat{B} \circ \hat{C}) \circ\circ \hat{D}.$$

На основании этого свойства уравнение (20) представим так:

$$\int_{v} \rho[(\Delta\bar{f} - \Delta\bar{a}) \circ \delta\bar{u} - (\Delta\hat{t} \circ \tilde{\nabla}\bar{r} - \hat{t} \circ \tilde{\nabla}\bar{u}) \circ\circ \nabla\delta\bar{u}]\, dv +$$

$$\int_{s_1} \Delta\bar{p} \circ \delta\bar{u}\, ds + \int_{O_2 \cap s_1} \bar{p} \circ \delta\bar{u}\, ds = 0.$$

Окончательно запишем:

$$\int\limits_{v} \rho\left[(\Delta\bar{f} - \Delta\bar{a})\circ\delta\bar{u} - \hat{Q}\circ\circ\nabla\delta\bar{u}\right]dv +$$

$$+\int\limits_{O_2} \Delta\bar{p}\circ\delta\bar{u}\,ds + \int\limits_{s_2\cap s_1} \bar{p}\circ\delta\bar{u}\,ds = 0, \qquad (2$$

где

$$\hat{Q} = \Delta\hat{t}\circ\tilde{\nabla}\bar{r} - \hat{t}\circ\tilde{\nabla}\bar{u} = \Delta\hat{t} - (\Delta\hat{t} + \hat{t})\circ\tilde{\nabla}\bar{u} \qquad (2$$

Полученное вариационное уравнение (2I), учитываю начальные напряжения, отличается от вариационного уравне Даламбера-Лагранжа (I) тем, что

I) в тензор напряжения включен тензор начального напря ния, скалярно умноженный на градиент вектора перемещения исходного состояния в конечное;

2) в уравнение входит дополнительный интеграл, обусло ный начальными поверхностными силами.

Литература

I. Лурье А.И. Теория упругости. М., "Наука", 1970.