конструкций: Межвуз. сб. Куйбышевск. авиац. ин-т. Куйбышев. I983. С. 92-97.

3. Михеев Р.А. Общая теория и измерительные свойства тензорозеток // Метрология, I984., № 7. С.30-36.

УДК 539.3

И.Р.Заверткин, Х.С.Хазанов

# ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МАТРИЦЫ МАСС В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В СТЕРЖНЯХ

Использование численных методов в задачах распространения волн деформаций приводит к появлению фиктивных осцилляций и дисперсии. На примере распространения продольных волн в стержне рассматривается подход, основанный на представлении матрицы масс в виде линейной комбинации согласованной и диагональной матриц и введении слабого искусственного демпфирования. Показано, что при соответствующем подборе параметров можно существенно повысить точность расчетов.

В результате многократного отражения волн от граничных поверхностей в телах, подверженных импульсным нагрузкам, образуется дифракционное поле, определение которого представляет серьезные математические трудности. Дискретизация среды на конечные элементы, применение шаговых методов интегрирования дифференциальных уравнений по времени приводит к побочным отрицательным эффектам: возникновению фиктивных осцилляций и дисперсии /I/. Использование при моделировании квазирегулярной сетки или уменьшение шага интегрирования по времени /2/ не позволяет существенно улучшить результаты вычислений. Значительного повышения точности решения можно добиться модернизацией структуры используемых конечных элементов. Метод рассмотрен на примере распространения волн вдоль однородного стержня. При дискретизации стержня используются одномерные двухузловые конечные элементы с линейной аппроксимацией перемещений вдоль его оси. Применение согласованной $M_c^e = \frac{\rho F \ell}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ либо диагональной $M_g^e = \frac{\rho F \ell}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ матриц масс ( $\rho$ - плотность материала; $F$ - площадь поперечного сечения; $\ell$ - длина элемента) при моделировании волновых задач приводит, как будет показано ниже, к значительным погрешностям. Для их снижения будем применять модифицированную матрицу масс (ММ), представляющую собой линейную комбинацию согласованной и диагональной матриц:

$$M_M^e = S M_c^e + (1-S) M_g^e , \tag{1}$$

где $S$ - структурный коэффициент ($0 \le S \le 1$). Для предельных значений коэффициента $S$ , равном 1 или 0, ММ преобразуется в согласованную или диагональную матрицы.

Проведем анализ влияния структуры ММ на величину дисперсии. Из рассмотрения уравнений движения двух смежных конечных элементов равномерной сетки при отсутствии внешней нагрузки в общем для них узле можно записать

$$\frac{EF}{\ell}(2u_r - u_{r-1} - u_{r+1}) + \frac{S\rho F\ell}{6}(4\ddot{u}_r + \ddot{u}_{r-1} + \ddot{u}_{r+1}) + (1-S)\rho F \ell \ddot{u}_r = 0. \tag{2}$$

Здесь $u_{r-1}$ , $u_r$ , $u_{r+1}$ , $\ddot{u}_{r-1}$ , $\ddot{u}_r$ , $\ddot{u}_{r+1}$ - узловые перемещения и ускорения в узлах $r-1$ , $r$ , $r+1$ конечноэлементной сетки, $E$ - модуль упругости. При выводе уравнения (2) учтено, что матрица жесткости конечного элемента равна $\mathbf{K}^e = \frac{EF}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Решение уравнения (2) будем отыскивать в виде

$$u = A \exp ik(x - C_p t),$$

где $A$ - комплексная амплитуда, $k$ - волновое число, $C_p$ - скорость распространения дисперсных волн. При равномерной сетке координата узла $r$ равна $x_r = r\ell$ . Тогда перемещение узла может быть записано следующим образом:

$$u_r = A \exp ik(r\ell - C_p t). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) и учитывая, что

$$u_{r+q} = u_r \exp q ik\ell, \quad \ddot{u}_{r+q} = -C_p^2 k^2 \exp q ik\ell \quad (q = -1, 0, 1),$$

получим

$$C_p^2 = \frac{E}{\rho \ell^2 k^2} \, \frac{6(1-\cos k\ell)}{3-(1-\cos k\ell)S}. \tag{4}$$

Величину дисперсии, возникающей за счет разбиения континуума на конечные элементы, будем оценивать по отношению скорости распространения дисперсной волны $C_p$ в конечноэлементной модели к скорости распространения бездисперсной волны $C = \sqrt{E/\rho}$ в континууме. Из соотношения (4) получим:

$$\frac{C_p}{C} = \frac{2\sin k\ell/2}{k\ell}\sqrt{\frac{3}{3-(1-\cos k\ell)S}}\,. \qquad (5)$$

Погрешность воспроизведения скорости распространения волн напряжений $\varepsilon = 1 - C_p/C$ для различных значений структурного коэффициента $S$ приведена на рис.I. Наименьшая дисперсия может быть достигнута с помощью модифицированной матрицы масс при значениях структурного коэффициента $S = 0,5...0,75$.

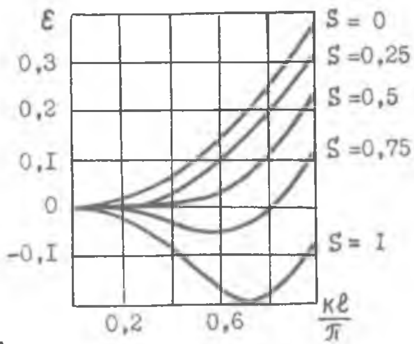


Рис. I

Решение волновой задачи при конечноэлементном моделировании стержня осуществлялось прямым интегрированием матричного уравнения движения

$$M\ddot{V} + KV = P \qquad (6)$$

с использованием $\gamma$ -метода /3/. Параметры численного интегрирования $\gamma$ и $\beta$ влияют на погрешность воспроизведения частоты и амплитуды колебания. В случае, когда $\beta \neq 0$, процесс интегрирования сопровождается искусственным демпфированием, которое тем сильнее, чем больше $\beta$. При выполнении ограничений $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq \gamma \leq 4 - 2\beta$ метод является безусловно устойчивым и процесс интегрирования сходится при любых значениях шага интегрирования $\Delta t$ /3/. Исследование быстро протекающих процессов требует для обеспечения необходимой точности применения малого шага интегрирования. При этом становится возможным расширить предельные границы параметра $\gamma$.

Сравнение численного решения с аналитическим рассмотрим на примере распространения волны вдоль металлического стержня длиной $L = 0,6$ м со свободными концами при следующих исходных данных: $F = 10^{-4}$ м$^2$; $E = 2\cdot10^5$ МПа; $\rho = 7,8\cdot10^3$ кг/м$^3$. Нагрузка $P(t)$=I00 Н типа функции Хевисайда приложена к одному из свободных концов. Время действия нагрузки соответствует прохождению фронтом волны 0,6 длины стержня. Число конечных элементов принято равным 60. Шаг $\Delta t = 0{,}6\,\ell/c$ выбираем из условия сходимости решения при всех рассматриваемых ниже режимах интегрирования. На рисунках 2-4 показано распределение напряжений в стержне при различных параметрах интегрирования в момент времени, соответствующий одному отражению волнового фронта от свободного конца стержня. Распределение напряжений при точном решении задачи отмечено штриховой линией.

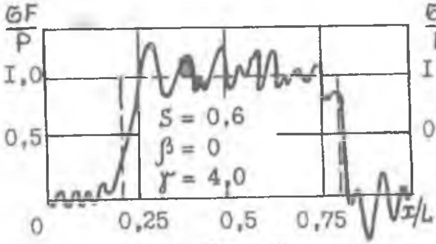



Рис. 2

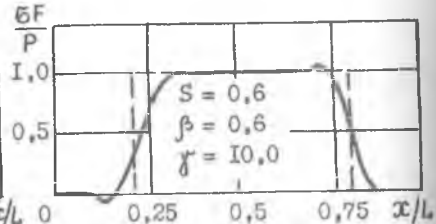



Рис. 3

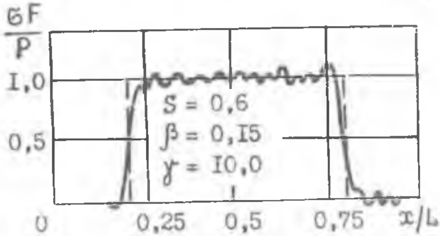



Рис. 4

При отсутствии искусственного демпфирования ( $\beta = 0$, рис.2) паразитные осцилляции, возникающие за счет погрешностей в высокочастотной части спектра, сильно искажают форму импульса.

Применение сильного демпфирования ( $\beta = 0{,}6$ , рис.3) позволяет устранить паразитные осцилляции за счет фильтрации высокочастотных компонент, но приводит к уменьшению градиента волнового фронта, „размыванию" прямоугольного импульса напряжений.

Приемлемые результаты можно получить при использовании слабого демпфирования ( $\beta = 0{,}I5$ , рис.4). На рис.5 и 6 приведены результаты расчета, соответствующие слабому демпфированию ( $\beta = 0{,}I5$) при использовании согласованной матрицы масс ( $S = I$) и диагональной ( $S = 0$). Использование согласованной и диагональной матриц масс дает худшие результаты, чем использование модифицированной матрицы (см.рис.4).

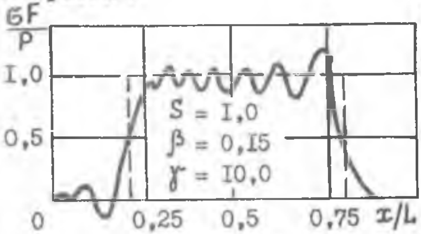



Рис. 5

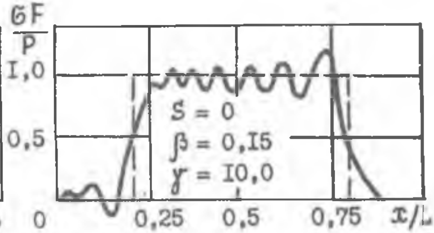


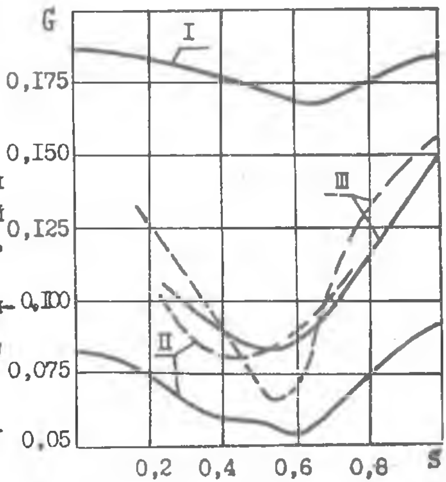

Рис. 6

Для оценки степени соответствия конечноэлементного решения точному при различных значениях структурного коэффициента $S$ и величины демпфирования введем интегральный критерий $G$ :

$$G = \frac{1}{\sigma_o^{max} L} \int_0^L |\sigma_o(x) - \sigma(x)| dx,$$

где $\sigma(x)$ - напряжения в стержне в фиксированный момент времени $t$ , полученные по МКЭ; $\sigma_o(x)$ - теоретические значения напряжений в тот же момент времени. На рис.7 приведены зависимости величины $G$ от $S$ при различных $\beta$ до отражения волны от конца стержня (сплошная линия) и после двух отражений (штриховая).

При отсутствии дэмпфирования ( $\beta$ = 0) ни для каких значений коэффициента $S$ нельзя получить конечноэлементное решение, близкое к точному. При сильном демпфировании ( $\beta$ = 0,6) величина $G_{min}$ с течением времени увеличивается в результате снижения градиента волнового фронта. Применение слабого демпфирования ( $\beta$ = 0,I5) приводит к тому, что минимальное значение $G$ с течением времени понижается, так как небольшое




I - $\gamma$ = 4, $\beta$ = 0; II - $\gamma$ = 8, $\beta$ = 0,6; III - $\gamma$ = I0, $\beta$ = 0,I5

Рис. 7

демпфирование позволяет существенно снизить паразитные осцилляции, но не приводит к сильному размыванию волнового фронта.

Библиографический список

1. Mullen R., Belytschko T. Dispersion analysis of finite element semidiscretizations of the two-dimensional wave-equation // Int. J. Numer. Meth. Eng. - 1982. 18, N1. P. 11-29.

2. Khang T., Rogers J. Control of elastic plane wave dispersion in two-dimensional finite element meshes // Comp. and Struct. - 1985. N6. P. 1145-1151.

3. Савельев Л.М. Прямое интегрирование уравнений движения в методе конечных элементов // Прочность и долговечность элементов конструкций летательных аппаратов: Межвуз.сб.Куйбышевск.авиац.ин-т. Куйбышев. 1984. С.37-44.

УДК 539.3

Б.А.Коновалов

# ОСТАТОЧНАЯ ПРОЧНОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С МАКРОДЕФЕКТОМ В НАРУЖНОМ СЛОЕ

Рассматривается приближенный метод определения остаточной прочности трехслойной оболочки из композиционного материала с поперечной макротрещиной в наружном несущем слое.

Определение несущей способности конструкций из традиционных материалов обычно является не простой задачей. Для трехслойных оболочек из композиционных материалов с макродефектом решение этой задачи даже в „балочном" приближении весьма сложно.

Рассмотрим трехслойную оболочку с наружным и внутренним несущими слоями, выполненными из стеклопластика, в которых наполнитель