

УДК 629.7.028

В.В.Кабанов, Л.П.Железнов,
 С.В.Астрахарчик

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РАСЧЕТУ НА
 ПРОЧНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ФЮЗЕЛЯЖА САМОЛЕТА

Рассматривается задача расчета на прочность подкрепленной рингерами и шпангоутами оболочки типа фюзеляжа самолета, нагруженной системой поверхностных сил q_1, q_2, q_3 , локальными сосредоточенными силами $P_{1к}, P_{2к}, P_{3к}$ и моментами $M_{1к}, M_{2к}, M_{3к}$.

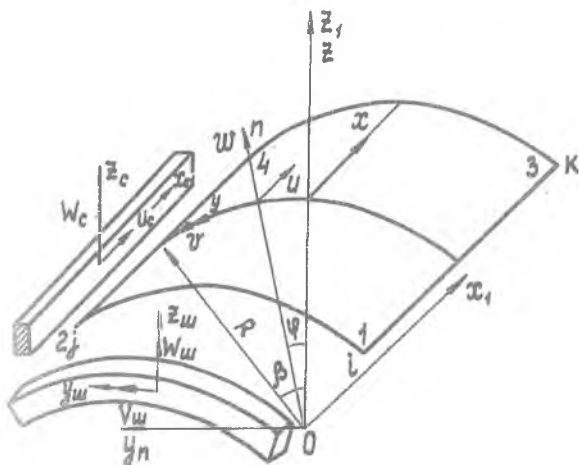


Рис. I

Оболочка разбивается на \mathcal{N} четырехугольных криволинейных конечных элементов и ℓ стержневых элементов (рис. I). Вывод основных соотношений для четырехугольного конечного элемента проводим с учетом смещения конечного элемента как жесткого целого [1]. При

поступательном перемещении оболочки как жесткого целого с компонентами $\delta_{x1}, \delta_{y1}, \delta_{z1}$ и малом повороте с компонентами θ_{x1}, θ_{y1} . поле перемещений имеет вид

$$\tilde{u} = N_1 \tilde{\delta} + N_2 \tilde{\theta}, \quad (1)$$

где $\tilde{u} = [u \ v \ w]^T$, $\tilde{\delta} = [\delta_{x1} \ \delta_{y1} \ \delta_{z1}]^T$, $\tilde{\theta} = [\theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1}]^T$,

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & R(\gamma-c) & -sR \\ (c\gamma-1)R & -xc & xc \\ s\gamma R & xc & xs \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$s = \sin \varphi, \quad c = \cos \varphi, \quad \gamma = \cos \beta.$$

Если в качестве функций перемещений принять

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 xy + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 - \alpha_6 sR + \alpha_{20}(c-\gamma)R, \\ v &= \alpha_5 xy + \alpha_6 xc + \alpha_7 y - \alpha_8(1-c\gamma)R + \alpha_{20}xs + \alpha_{23}c - \alpha_{24}s, \\ w &= \alpha_9 x^3 y^3 + \alpha_{10} x^3 y^2 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x^3 + \alpha_{13} x^2 y^3 + \\ &+ \alpha_{14} x^2 y^2 + \alpha_{15} x^2 y + \alpha_{16} x^2 + \alpha_{17} xy^3 + \alpha_{18} xy^2 + \\ &+ \alpha_{19} xy - \alpha_{20} xc + \alpha_{21} y^3 + \alpha_{22} y^2 + \alpha_{23} s + \alpha_{24} c + \\ &+ \alpha_8 s\gamma R + \alpha_6 xs, \end{aligned} \quad (3)$$

то шесть компонентов перемещений как жесткого целого будут учтены точно.

В матричной форме (3) имеет вид

$$\tilde{u} = P \cdot \alpha, \quad (4)$$

где P - матрица связи порядка (3×24) , $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{24}]^T$ - вектор неизвестных коэффициентов полиномов.

Выразим неизвестные коэффициенты α через узловые перемещения и углы поворотов. Используя (4) для узлов элемента, получаем

$$\bar{u} = B \cdot \alpha, \quad (5)$$

где $\bar{u} = [u_i \ v_i \ w_i \ W_{xi} \ \theta_i \ W_{xyi} \ u_j \ v_j \ \dots \ W_{xyj} \ u_k \ v_k \ \dots \ W_{xyk} \ u_n \ v_n \ \dots \ W_{xyn}]^T$ - вектор узловых перемещений

ного элемента; i, j, k, l - индексы узлов конечного элемента, B - квадратная матрица двадцать четвертого порядка, $W_{y_i} = V_i/R$, буквы x, y в нижних индексах означают дифференцирование.

Из (4), (5) находим

$$\alpha = B^{-1} \bar{u}, \quad \bar{u} = P_1 \bar{u}, \quad P_1 = P \cdot B^{-1} \quad (6)$$

Запишем выражение энергии деформации и работы внешних сил четырехугольного криволинейного элемента:

$$W_{\epsilon} = \frac{1}{2} \iint_S T^T \epsilon ds, \quad A_{\epsilon} = \iint_S q^T \bar{u} ds + A_K + A_{\epsilon}. \quad (7)$$

Здесь $T = [T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3]^T$ - вектор внутренних сил конечного элемента; $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3]^T$ - вектор деформаций четырехугольного конечного элемента; $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ - вектор действующей на конечный элемент поверхностной нагрузки; A_{ϵ} - работа локальных узловых сил; A_K - работа контурных сил.

Кинематические и физические соотношения возьмем в виде [2]

$$\epsilon = A \cdot \bar{u}; \quad T = D \cdot \epsilon, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} ()_x & 0 & 0 \\ 0 & ()_y & k_2 \\ ()_y & ()_x & 0 \\ 0 & 0 & -()_{xx} \\ 0 & k_2 ()_y & -()_{yy} \\ 0 & 2k_2 ()_x & -2 ()_{xy} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$C_1 = Eh/(1-\nu^2), \quad C_2 = \nu \cdot C_1, \quad C_3 = \frac{1}{2} (1-\nu) C_1,$$

$$D_1 = Eh^3/12(1-\nu^2), \quad D_2 = \nu D_1, \quad D_3 = \frac{1}{2} (1-\nu) D_1, \quad k_2 = R^{-1}$$

подставляя (8) с учетом (6) и (7), получаем

$$W_{\epsilon} = \frac{1}{2} \bar{u}^T K_{\epsilon} \bar{u}, \quad A_{\epsilon} = (Q + Q_1 + Q_2) \bar{u}, \quad (10)$$

$$K_{\epsilon} = \iint_S (A P_1)^T D A P_1 ds \quad (11)$$

матрица упругой жесткости элемента,

$$Q = \iint_S q^T P_1 ds \quad (12)$$

- вектор поверхностных приведенных к узлам сил; Q_1 - вектор локальных узловых сил, Q_2 - вектор контурных приведенных к узлам сил.

Запишем выражение энергии деформации и работы внешних сил для криволинейного стержневого элемента

$$W_i = \frac{1}{2} \int_e \bar{T}^T \bar{\epsilon} d\ell, \quad \bar{A}_i = \int_e \bar{q}^T \bar{u}' d\ell + \bar{A}_e. \quad (13)$$

Здесь $\bar{T} = [\bar{T}_1, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3]^T$ - вектор внутренних усилий стержневого элемента; $\bar{\epsilon} = [\bar{\epsilon}, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, \bar{\chi}_3]$ - вектор деформаций стержневого элемента; $\bar{q}' = [q_1, q_2, q_3]^T$ - вектор удельных контурных сил стержневого элемента; A_e - работа локальных сил, действующих на стержневой элемент.

Кинематические и физические соотношения возьмем в виде

$$\bar{\epsilon} = \bar{A} \bar{u}', \quad \bar{T} = \bar{D} \bar{\epsilon}, \quad (14)$$

где

$$\bar{A} = A_{uc} = \begin{bmatrix} -l_1 k_2(\cdot) & (\cdot)_y & l k_2(\cdot) \\ l l_1 k_2^2(\cdot) & 0 & -l^2 k_2^2(\cdot) - l_1 k_2 w_x - (\cdot)_{yy} \\ -l k_2(\cdot)_y & 0 & -w_x - l_1 k_2(\cdot)_y \\ -l^2 k_2^2(\cdot) - (\cdot)_{yy} & 0 & l k_2 w_x + l l_1 k_2^2(\cdot) \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = A_c = \begin{bmatrix} (\cdot)_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\cdot)_{xx} \\ 0 & 0 & -(\cdot)_{xy} \\ 0 & -(\cdot)_{xx} & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

для конечного элемента шпангоута и стрингера соответственно, ненулевые элементы матрицы \bar{D} имеют вид $d_{11} = EF$, $d_{22} = E\mathcal{J}_1$, $d_{33} = G\mathcal{J}_p$, $d_{44} = E\mathcal{J}_2$, F - площадь поперечного сечения стержня (рис. 2); \mathcal{J}_1 - максимальный момент инерции поперечного сечения; \mathcal{J}_2 - минимальный момент инерции конечного элемента; \mathcal{J}_p - полярный момент инерции сечения; $(\bar{u}') = [u \ v \ w]^T$ - вектор перемещений точек

стержневого элемента. На рис. 2 $z' \xi'$ - главные центральные оси инерции стержня. Запишем связь перемещений точек стержневого конечного элемента с перемещениями точек четырехугольного конечного элемента. Согласно рис. 2 получаем

$$U = l_0 u - l_1 w + e l w_x, \quad W = l w + l_1 u + e l_1 w_x$$

$$V = v + e w_y, \quad (I6)$$

$l_0 = \cos(\alpha); l_1 = \sin \alpha; e$ - эксцентриситет.

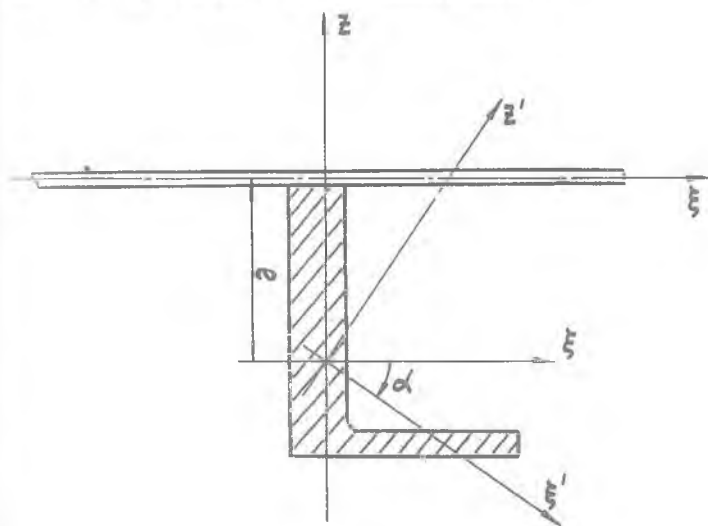


Рис. 2

В матричной форме

$$\tilde{u}' = \bar{B} \tilde{u}, \quad \tilde{u}' = \bar{B} P_1 \bar{u}, \quad (I7)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} l & 0 & e l ()_x - l_1 () \\ 0 & 1 & e ()_y \\ l_1 & 0 & l () + e l_1 ()_x \end{bmatrix} \quad (I8)$$

Соотношения (I4) с учетом (I6) запишем в виде

$$\bar{\epsilon} = \bar{A}' \tilde{u}, \quad (I9)$$

где для стержневого элемента шпангоута

$$\bar{A}' = \bar{A}'_{ш} = \begin{bmatrix} 0 & (\cdot)_y & k_2(\cdot) + e(\cdot)_{yy} \\ -l_1(\cdot)_{yy} & 0 & -l_1 k_2(\cdot)_x - l k_2^2(\cdot) - l(\cdot)_{yy} - e l_1(\cdot)_{xyy} \\ -k_2(\cdot)_y & 0 & -(1 + e k_2)(\cdot)_{xy} \\ l(\cdot)_{yy} & 0 & -l_1 k_2^2(\cdot) - l k_2(\cdot)_x - l_1(\cdot)_{yy} + e l(\cdot)_{xyy} \end{bmatrix}$$

для стержневого элемента стрингера

$$\bar{A}'_c = \bar{A}'_c = \begin{bmatrix} (\cdot)_x & 0 & e(\cdot)_{xx} \\ 0 & -l_1(\cdot)_{xx} & -l(\cdot)_{xx} - e l_1(\cdot)_{xxy} \\ 0 & 0 & -(\cdot)_{xy} \\ 0 & l(\cdot)_{xx} & -l_1(\cdot)_{xx} + e l(\cdot)_{xxy} \end{bmatrix}$$

Подставляя (19) в (13), получаем выражение энергии деформации и работы внешних сил для стержневого элемента шпангоута и стрингера:

$$(W_i)_{ш} = \frac{1}{2} \bar{u}^T K_{ш} \bar{u}, \quad (A_i)_{ш} = (Q_{ш} + Q_{1ш}) \bar{u},$$

$$(W_i)_c = \frac{1}{2} \bar{u}^T K_c \bar{u}, \quad (A_i)_c = (Q_c + Q_{1c}) \bar{u}.$$

Здесь

$$K_{ш} = \left(\int_e (\bar{A}'_{ш} P_1)^T \bar{D}_{ш} \bar{A}'_{ш} P_1 dl \right)_{x = \pm \frac{a}{2}}$$

$$K_c = \left(\int_e (\bar{A}'_c P_1)^T \bar{D}_c \bar{A}'_c P_1 dl \right)_{y = \pm \frac{b}{2}},$$

$$Q_{ш} = \left(\int_e q_{ш}^T \bar{B} P_1 dl \right)_{x = \pm \frac{a}{2}},$$

$$Q_c = \left(\int_e q_c^T \bar{B} P_1 dl \right)_{y = \pm \frac{b}{2}},$$

где $K_{ш}$, K_c - матрицы жесткости элемента шпангоута и стрингера соответственно, $Q_{ш}$, Q_c - вектор удельных контурных шпангоута и стрингера, приведенные к узловым силам, a и b длины сторон четырехугольного конечного элемента. Суммируя в

гию деформации и работу внешних сил конечных элементов, получаем полную потенциальную энергию оболочки

$$\Pi = \sum_1^2 (W_i - A_i) + \sum_1^2 (\bar{W}_i - \bar{A}_i) \quad (24)$$

или

$$\Pi = \sum_1^2 (\bar{u}^T K_u - Q - Q_1 + Q_2) \bar{u} + \sum_1^2 (\bar{u}^T (K_{ш} + K_c) - Q_{ш} - Q_c - Q_{1ш} - Q_{1c}) \bar{u}. \quad (25)$$

Согласно принципу возможных перемещений $(\delta \Pi) = 0$ получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений равновесия:

$$\left(\sum_1^2 K_u + \sum_1^2 (K_{ш} + K_c) \right) \bar{u} - \sum_1^2 (Q + Q_1 + Q_2) + \sum_1^2 (Q_{ш} + Q_c + Q_{1ш} + Q_{1c}) = 0. \quad (26)$$

Учитывая условие совместности перемещений в узлах конечных элементов

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^i = \bar{u}_j^{i-1} = \bar{u}_k^{i-n} = \bar{u}_n^{i-n-1}, \quad \bar{u}_j^i = \bar{u}_i^{i+1} = \bar{u}_n^{i-1} = \bar{u}_k^{1-n+1}, \\ \bar{u}_k^i = \bar{u}_n^{i+1} = \bar{u}_i^{i+n} = \bar{u}_j^{i+n-1}, \quad \bar{u}_n^i = \bar{u}_k^{i+1} = \bar{u}_j^{i+n} = \bar{u}_i^{i+n+1}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $(\bar{u}_k^i)^T = [U_k^i \ V_k^i \ W_k^i \ W_{xx}^i \ Q_k^i \ W_{xy}^i]$ - вектор узловых перемещений k -го узла i -го элемента, преобразуем систему (26) к виду

$$(\bar{K} + \bar{K}_{ш} + \bar{K}_c) u' = \bar{Q}. \quad (28)$$

Здесь \bar{K} - матрица упругой жесткости оболочки, $\bar{K}_{ш}$ - матрица упругой жесткости планшотов, \bar{K}_c - матрица упругой жесткости стрингеров, $(u')^T = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \dots \ \bar{u}_n \ \dots \ \bar{u}_v]$ - вектор узловых перемещений оболочки, \bar{Q} - вектор обобщенных узловых сил оболочки.

Систему (28) необходимо преобразовать с учетом граничных условий. Для этого элементы строк матриц \bar{K} , $\bar{K}_{ш}$, \bar{K}_c , соответствующие заданному перемещению, полагаются равными нулю, на место диагонального элемента заносится большое число. Соответственно граничным условиям видоизменяется вектор \bar{Q} .

Система линейных алгебраических уравнений решается методом квадратного корня по схеме Холленкго. После решения системы (28) по формулам (8), (14) находим все компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки.

Полученный алгоритм реализован на машине БЭСМ-6 и позволял решать задачи прочности оболочек при произвольных нагрузках.

В качестве примера исследована задача прочности круговой цилиндрической оболочки, подкреплённой по краям и по середине тремя шпангоутами и нагруженная по краям четырьмя радиальными растягивающими силами $P = 100$ кг. Оболочка имеет длину $L =$ радиус $R = 1$ м, толщину $\delta = 0.0015$ м, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, модуль нормальной упругости $E = 2.7 \cdot 10^6$ кгс/см².

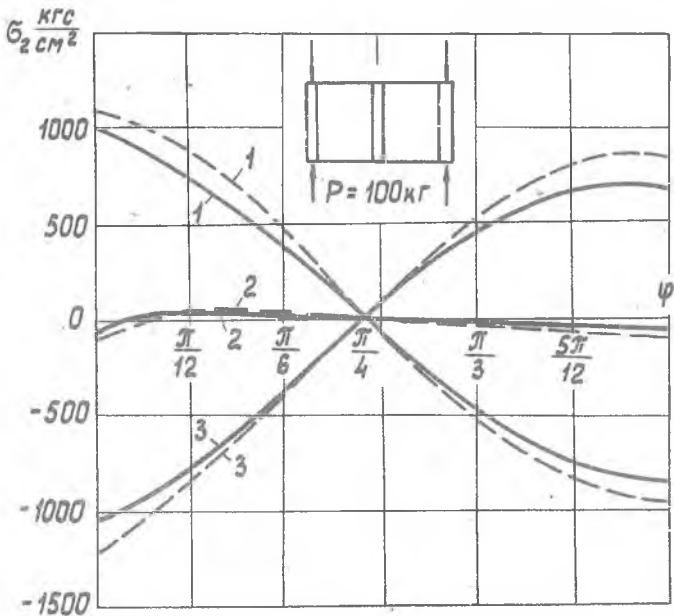


Рис. 3

Размеры шпангоута приведены на рис. 4. На рис. 3, 4 показано изменение напряжений σ_2 по окружности и по образующей оболочки, проходящим через точку приложения силы. Пунктиром даны значения напряжений σ_2 на внутренней поверхности обшивки, сплошной линией - на наружной поверхности обшивки. Кривые 1, 3 соответствуют случаям, когда нейтральная ось шпангоута смещена относительно нейтральной оси обшивки на 0.01 м соответственно внутрь и наружу оболочки. Кривые 2 соответствуют случаю, когда

триальная ось шпангоута совпадает с нейтральной осью обшивки. Но, что величина эксцентриситета существенно влияет на величину напряжений в обшивке оболочки.

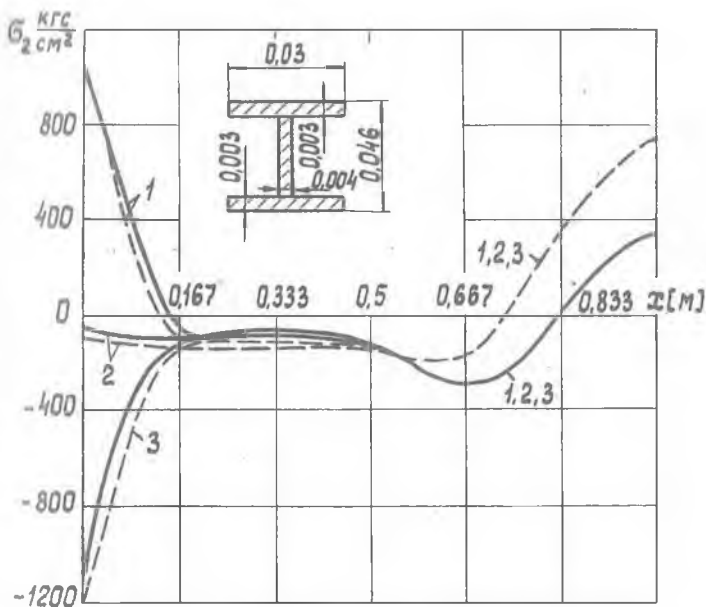


Рис. 4

Л и т е р а т у р а

1. Кантин, Клауф. Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т.6, №6.
2. Ляз А. Математическая теория упругости. М.-Л., ОНТИ, 1935.