

видно из рисунка, кривые хорошо согласуются с экспериментом /1/.

Было исследовано поведение прямоугольной пластины, мгновенно охваченной порывом, при безотрывном обтекании передней кромки. Удлинение пластины  $\lambda = 2$ . Среднеалгебраическое значение относительных прогибов передней и задней точек концевой хорды изображено на рис.4 кривой 1, их разностная величина - кривой 3. Так как деформации хорды незначительны, то эти кривые можно трактовать как изгибные и крутильные колебания прямоугольного крыла при малом отношении массы крыла к массе корпуса летательного аппарата. С ростом этой величины заметно изменяются как аэродинамическая нагрузка на крыло, так и его перемещения. Об этом говорят кривые 2 и 4, по физическому смыслу аналогичные кривым 1 и 3, полученным для крыла с массой, составляющей половину массы корпуса летательного аппарата.

#### Л и т е р а т у р а

1. Белоцерковский С.М., Никит П.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. - М.: Наука, 1978.

2. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. / Под редакцией К.З.Галимова. - Казань: изд. КГУ, 1977.

3. Вахитов М.Б., Гарифуллин М.Ф., Селин И.С. Численная методика определения НДС лопастей винтов в условиях нестационарного обтекания. - Тезисы докладов на III НТК "Совершенствование эксплуатации и ремонта корпусов судов". - Калининград, 1984.

4. Гарифуллин М.Ф., Селин И.С. Численный метод решения задачи динамики оболочек. - В межвуз.сб. Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. - Куйбышев, 1983.

УДК 629.7.05.4

Ф.Н.Шклярчук, Н.П.Тютюников, С.Ю.Данченко

#### ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ОТСЕКА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим прямой отсек дискретно подкрепленной продольными элементами цилиндрической оболочки с произвольным контуром поперечного сечения, рис.1. Отсек является частью нерегулярной тонкостенной конструкции, например, крыла большого удлинения или фюзеля-

лжа с вырезом. По торцам отсек соединяется с другими отсеками в общем случае через упругие шпангоуты (нервюры). При расчете напряженного состояния или колебаний конструкции такой отсек будем рассматривать как укрупненный конечный элемент или суперэлемент.

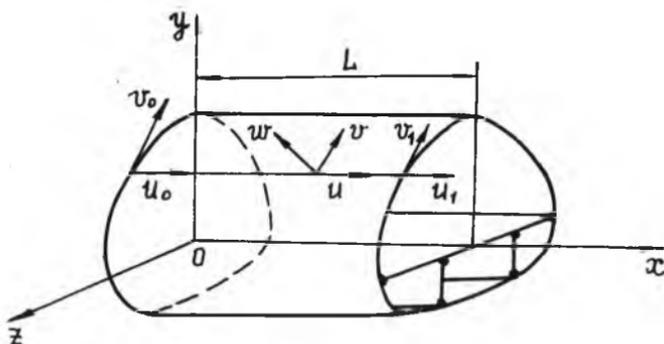


Рис. I

Алгоритм составления уравнений колебаний тонкостенных конструкций летательных аппаратов по методу отсеков изложен в учебном пособии /1/. Перемещения на торцах отсеков, а также на соответствующих контурах соединительных шпангоутов (нервюр) представляются в виде разложений по заданным функциям контурной координаты с неизвестными коэффициентами, которые рассматриваются в качестве обобщенных координат. Потенциальная и кинетическая энергии отсеков и шпангоутов (нервюр) записываются в обобщенных координатах. При этом для отсеков используются решения однородной квазистатической задачи при заданных перемещениях на торцах. Уравнения колебаний нерегулярной составной конструкции в обобщенных координатах получаются по методу Лагранжа. При увеличении числа обобщенных координат расчетная модель конструкции уточняется, начиная с простейшей балочной модели.

В работе /2/ для построения матрицы жесткости скошенного отсека произвольной безмоментной цилиндрической оболочки использовалось приближенное решение вариационным методом в напряжениях. Здесь матрица жесткости (потенциальная энергия в обобщенных координатах) для прямого отсека подкрепленной безмоментной цилиндрической оболочки с произвольным открытым или многозамкнутым контуром поперечного сечения строится на основе точного решения.

Для получения точного решения в рядах построим на контуре поперечного сечения подкрепленной безмоментной оболочки полную систему ортогональных функций. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(h\varphi')' + \lambda^2 h_* \varphi = 0, \quad (1)$$

где  $h_*(s) = h(s) + \sum f_j \delta(s-s_j)$ ;  $h(s)$  — толщина обшивки;  $f_j$  — площадь поперечного сечения продольного подкрепляющего элемента, расположенного в точке  $s = s_j$ .

Собственные функции  $\varphi_i(s)$  и собственные значения  $\lambda_i$  уравнения (1) определяются при следующих граничных условиях: в случае открытого контура ставится условие  $\varphi = 0$  на неподвижно закрепленном по продольным перемещениям крае и условие  $h\varphi' = 0$  на свободном от сдвигающих усилий крае; для оболочки с замкнутым контуром на краях условного разреза при  $s = 0$  и  $s = \ell$  ставятся условия сопряжения  $\varphi(0) = \varphi(\ell)$  и  $(h\varphi')_{s=0} = (h\varphi')_{s=\ell}$ . Для практических расчетов достаточно найти некоторое число низших собственных функций и собственных значений. Для этого удобно использовать метод Рунца или МКЭ на основе вариационного уравнения

$$\delta \int_C [h\varphi'^2 - \lambda^2 h_* \varphi^2] ds = 0, \quad (2)$$

из которого следует уравнение (1), условие  $h\varphi' = 0$  на свободном крае и условие сопряжения  $(h\varphi')_{s=0} - (h\varphi')_{s=\ell} = 0$ .

Собственные функции и их производные при указанных граничных условиях являются ортогональными на контуре  $C$  поперечного сечения оболочки:

$$\int_C \varphi_i \varphi_j h_* ds = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ \mu_i, & j = i \end{cases}; \quad \int_C \varphi'_i \varphi'_j h ds = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ \lambda_i^2 \mu_i, & j = i \end{cases}. \quad (3)$$

В общем случае для оболочки с замкнутым контуром, а также для оболочки с открытым контуром при свободных краях в число собственных функций входит функция  $\varphi_0(s) = 1$  при  $\lambda_0 = 0$  ( $i = 0$ ).

Найдем решение однородной статической задачи при заданных на торцах отсека перемещениях:

$$u|_{x=0} = u_0(s), \quad v|_{x=0} = v_0(s), \quad u|_{x=L} = u_1(s), \quad v|_{x=L} = v_1(s). \quad (4)$$

В этом случае для безмоментной оболочки из уравнений равно-

иссия следует, что  $\sigma_x = 0$ , а  $\sigma_x$  изменяется по линейному закону от  $x$ . На основании этого  $\sigma_x$  будем искать в виде

$$\sigma_x = E \left[ a_0 \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i x) \varphi_i(x) \right], \quad (5)$$

где  $a_0, a_i, b_i$  - неизвестные константы. Интегрируя уравнение равновесия элемента обшивки, найдем поток касательных сил

$$q = E \sum_{i=1}^{\infty} b_i \Phi_i(x) + G \sum_{p=1}^K \chi_p \eta_p(x), \quad (6)$$

где с учетом (1)

$$\Phi_i(x) = - \int_0^x \varphi_i h_* dx + \frac{1}{\lambda_i^2} h(0) \varphi_i'(0) = \frac{1}{\lambda_i^2} h \varphi_i'(x); \quad (7)$$

$\chi_p$  - неизвестные константы;  $\eta_p = 1$  в  $p$ -ом замкнутом контуре и  $\eta_p = 0$  в остальных контурах ( $K$  - число замкнутых контуров). Система функций  $\varphi_i'(x), \eta_p(x), i = 1, 2, \dots, \infty; p = 1, \dots, K$ , является полной; функции  $\varphi_i$  и  $\eta_p$  являются ортогональными между собой.

Далее, интегрируя соотношения закона Гука, найдем перемещения оболочки:

$$\begin{aligned} u &= (c_0 + a_0 x) \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (c_i + a_i x + b_i \frac{x^2}{2}) \varphi_i(x), \\ v &= - \sum_{i=1}^{\infty} [d_i + c_i x + a_i \frac{x^2}{2} + b_i (\frac{x^3}{6} - \frac{E}{G \lambda_i^2} x)] \varphi_i'(x) + \\ &+ \frac{1}{h} \sum_{p=1}^K (\chi_p + \chi_p x) \eta_p. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим (8) в граничные условия (4); первое и третье условия удовлетворим на совокупности функций  $h_* \varphi_i$ , а второе и четвертое - на совокупности функций  $h \varphi_i'$  и  $\eta_p$ . В результате получим все неизвестные константы интегрирования:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\mu_0} A_0^0; & a_0 &= \frac{1}{L \mu_0} (A_0^1 - A_0^0); \\ c_i &= \frac{1}{\mu_i} A_i^0; & d_i &= - \frac{L}{\mu_i} B_i^0; \\ a_i &= \frac{1}{L \mu_i} [(3x_i + 1)(A_i^1 - A_i^0) - 6x_i (B_i^1 - B_i^0)]; \\ b_i &= \frac{6x_i}{L^2 \mu_i} [2(B_i^1 - B_i^0) - (A_i^1 - A_i^0)]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\psi_r = \sum_{r=1}^k \beta_{pr} D_r^0; \quad \chi_p = \frac{1}{L} \sum_{r=1}^k \beta_{pr} (D_r^1 - D_r^0),$$

$$A_i^\alpha = \int_c^L u_\alpha \varphi_i h_* ds, \quad B_i^\alpha = \frac{1}{L} \int_c^L v_\alpha \Phi_i ds + \alpha A_i^\alpha, \\ D_p^\alpha = \int_c^L v_\alpha \eta_p ds, \quad \alpha = 0, 1, \quad (10)$$

$$[\beta_{pr}]_{k \times k} = [a_{pr}]_{k \times k}^{-1}, \quad a_{pr} = \int_c^L \eta_p \eta_r \frac{ds}{h}, \quad \alpha_i = (1 + \frac{12E}{GL^2 \lambda_i^2})^{-1}.$$

Перемещения на торцах оболочки  $x = 0$  ( $\alpha = 0$ ) и  $x = L$  ( $\alpha = 1$ ) представим в виде разложений:

$$u_\alpha = \sum_{m=1}^{n_\alpha} f_{\alpha m} \varphi_{\alpha m}(z), \quad v_\alpha = \sum_{m=1}^{n_\alpha} f_{\alpha m} \psi_{\alpha m}(z), \quad (11)$$

где  $\varphi_{\alpha m}, \psi_{\alpha m}$  - заданные функции, часть которых ( $m = 1, 2, \dots, 6$ ) соответствуют перемещениям и поворотам торцов как плоских недеформируемых сечений, а остальные ( $6 < m \leq n_\alpha$ ) - деформации и искривлению контура;  $f_{\alpha m}$  - обобщенные координаты.

Потенциальная энергия деформации оболочки в обобщенных координатах на основании полученного решения (5)-(10) с учетом свойств функций  $\varphi_i(z), \psi_i(z), \eta_p$  записывается в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n_0} \sum_{n=1}^{n_0} K_{mn}^{00} f_{0m} f_{0n} + \sum_{m=1}^{n_0} \sum_{n=1}^{n_1} K_{mn}^{01} f_{0m} f_{1n} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n_1} \sum_{n=1}^{n_1} K_{mn}^{11} f_{1m} f_{1n}, \quad (12)$$

где

$$K_{mn}^{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta} \frac{E}{L} \left\{ \frac{1}{\mu_0} A_{0m}^\alpha A_{0n}^\beta + \sum_{p=1}^k \sum_{r=1}^k \beta_{pr} D_{pm}^\alpha D_{rn}^\beta + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} [(3\alpha_i + 1) A_{im}^\alpha A_{in}^\beta - 6\alpha_i (A_{im}^\alpha B_{in}^\beta + A_{in}^\beta B_{im}^\alpha) + \right. \\ \left. + 12\alpha_i B_{im}^\alpha B_{in}^\beta] \right\} \quad (\alpha, \beta = 0, 1); \quad (13)$$

$$A_{im}^\alpha = \int_c^L \varphi_{\alpha m} \varphi_i h_* ds, \quad D_{pm}^\alpha = \int_c^L \varphi_{\alpha m} \eta_p ds,$$

$$B_{im}^\alpha = \frac{1}{L} \int_c^L \varphi_{\alpha m} \Phi_i ds + \alpha A_{im}^\alpha.$$

В качестве примера рассмотрим гладкую круговую цилиндрическую оболочку постоянной толщины ( $h_* = h = \text{const}$ ) с прямоугольным вырезом (рис.2), нагруженную на свободном конце сдвигающими погонными усилиями, распределенными по закону  $\sin \theta$ . Для случая симметричной деформации оболочки функции  $\varphi_i(\theta)$  будут:  $\cos i\theta$  - на замкнутом контуре и  $\cos i\pi\theta/\theta_e$  - на открытом контуре,  $i = 1, 2, \dots, \infty$ . Здесь угол  $\theta = s/R$  отсчитывается от вертикальной плоскости симметрии;  $\theta_e$  - угол края открытого контура в сечении выреза. Во всех поперечных сечениях, разделяющих отсеки, на которые делится оболочка, для перемещений (II) заданные функции берутся в виде:  $\varphi_{\alpha m} = \cos \frac{(m-1)\theta}{2}$ ,  $\varphi_{\alpha m} = 0$  при  $m = 1, 3, 5, \dots, n \leq n_\alpha$ ;  $\varphi_{\alpha m} = 0$ ,  $\varphi_{\alpha m} = \sin \frac{m\theta}{2}$  при  $m = 2, 4, 6, \dots, n \leq n_\alpha$ .

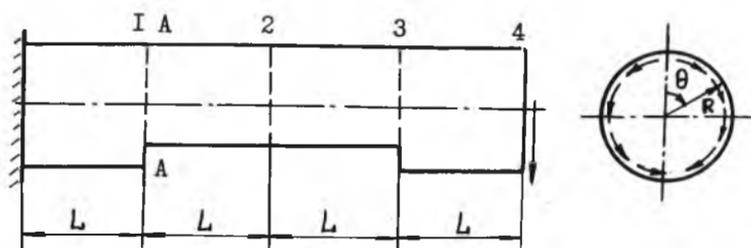


Рис. 2

Наряду с потенциальной энергией безмоментной деформации отсеков оболочки (I2) учитываем потенциальную энергию изгиба контура оболочки отсека I/:

$$P_{изг} = \frac{1}{2} \frac{Eh^3/R^3}{12(1-\mu^2)} \int_0^L \int_0^{\theta_\alpha} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right)^2 d\theta dx, \quad (I4)$$

где  $\theta_\alpha = \theta_e$  для отсеков с открытым контуром и  $\theta_\alpha = \pi$  для отсеков с замкнутым контуром. Выражение (I4) с учетом (8) - (II) записывается в обобщенных координатах и складывается с (I2). В общем случае функции  $\varphi'_i(\theta)$  и перемещения  $v(x, \theta)$  безмоментной оболочки имеют разрывы в точках расположения продольных подкрепляющих элементов при  $\theta = \theta_j$ . Чтобы обойти возникающие при вычислении  $P_{изг}$  затруднения, для коротких отсеков функцию  $v$  можно

аппроксимировать линейным законом  $v = (1-x/L)v_0(z) + (x/L)v_1(z)$  с учетом разложений (II) для  $v_0$  и  $v_1$ . При наличии достаточно жестких шпангоутов (нервур) потенциальной энергией изгиба контура тонкой оболочки можно пренебрегать.

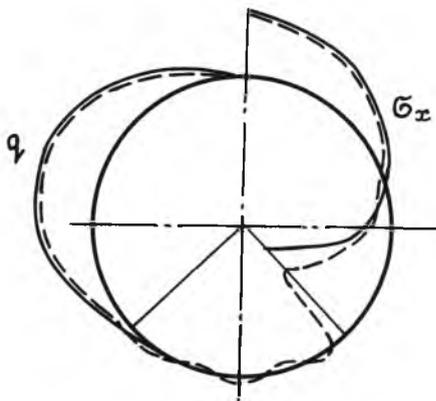


Рис. 3

Расчеты выполнены для оболочки с параметрами:  $R/h = 200$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $L_{об} = 8R$ ,  $\theta_e = 135^\circ$ . Оболочка делилась на четыре отсека одинаковой длины  $L = 2R$ . В каждом из разделяющих отсеки сечении и на крае оболочки рассматривалось по 17 обобщенных координат  $f_{\alpha m}$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ;  $m = 1, 2, \dots, 17$ ), девять из которых характеризовали продольные перемещения  $U_\alpha$  и восемь - окружные перемещения  $v_\alpha$ . На рис.3 показаны распределения нормальных напряжений  $\sigma_x$  и погонных сил  $q$ , непосредственно слева (пунктирные линии по замкнутому контуру) и справа (сплошные линии по открытому контуру) от сечения А-А оболочки (рис.2), которое проходит через край выреза. При расчетах приближенно учитывался окружной изгиб контура отсеков оболочки в соответствии с формулой (I4) с использованием линейной аппроксимации  $v$  по длине каждого отсека.

#### Л и т е р а т у р а

И. Шклярчук Ф.Н. Динамика конструкций летательных аппаратов.- М.: МАИ, 1983. - 80 с.

2. Шклярчук Ф.Н., Тютюнников Н.П. Уравнения колебаний скошенной тонкостенной конструкции типа крыла переменной стреловидности. - И сб. Прочность элементов конструкций летательных аппаратов, М.: МАИ, 1982, с.65-70.

УДК 539.834

Х.С.Хазанов, А.В.Хивиццев

### ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕРМЕТИЧНОСТИ БОЛТОВОГО ФЛАНЦЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В настоящей работе предлагается методика расчета герметичности болтового соединения двух одинаковых цилиндрических оболочек контактирующими фланцами (рис.1). Предполагается наличие между фланцами плоской прокладки, материал которой считается линейно-упругим, причем модуль упругости материала прокладки значительно меньше модуля упругости материала фланца. Учитывается влияние на величину зоны разгерметизации затяжки и податливости фланцевых болтов. Задача решается в линейной постановке, оболочка считается моментной. Конструкция нагружается силами затяжки болтов  $Q_B$  и внутренним давлением  $P_{вн}$ .

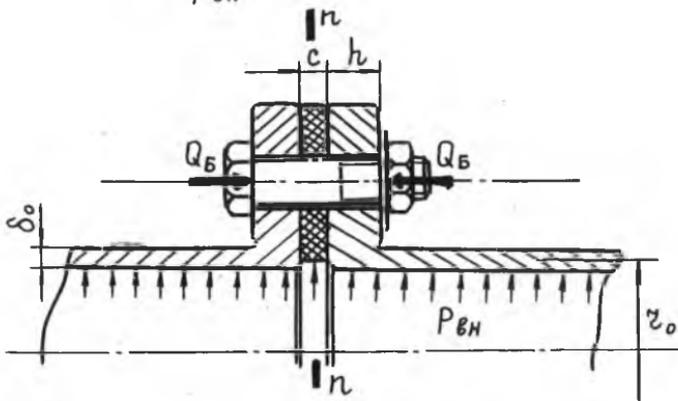


Рис. 1

В силу симметрии стыкового узла относительно плоскости  $n-n$ , проходящей через срединную поверхность прокладки (рис.1), и вследствие регулярности расположения фланцевых болтов при решении