УДК 620.I.08

Р.А.Михеев, О.Ю.Лейко

ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НДС ВСЛЕДСТВИЕ ОШИБОК ОРИЕНТАЦИИ ТЕНЗОРЕЗИСТОРОВ В РОЗЕТКЕ

Рассмотрены погрешности определения компонентов деформаций, обусловленные неточной ориентацией тензорезисторов, установленных на объекте. Изложен подход, дающий возможность определить погрешности при использовании тензорезисторов различной конфигурации. Приведены формулы для определения величин этой погрешности в случае использования трех- и четырехкомпонентных тензорозеток.

Развивается изложенный в работе /2/ подход к оценке погрешностей определения при испытаниях деформаций или напряжений, вызванных погрешностями $\Delta\varphi_i$ углов, составляемых осями тензорезисторов (ТР) с характерной осью X, выбранной на объекте. Исходным для анализа служит выражение для нахождения компонентов деформаций или напряжений вида:

$$\varepsilon = \sum_i K_i \varepsilon_i . \qquad (I)$$

Здесь ε - искомый компонент, ε_i - показания ТР, входящих в розетку тензорезисторов (РТ), K_i - коэффициенты, зависящие от углов $\Delta\varphi_i$.

Как было показано в /2/, при малых $\Delta\varphi_i$ погрешности ориентировки можно относить к измеренным значениям ε_i, полагая величины K_i точными. При таких условиях можно найти погрешности $\Delta\varepsilon_i$:

$$\Delta\varepsilon_i = \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varphi_i}\Delta\varphi_i . \qquad (2)$$

На основании (I) и (2) можно записать:

$$\Delta\varepsilon = \sum_i K_i \Delta\varepsilon_i = \sum_i K_i \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varphi_i}\Delta\varphi_i .$$

Согласно теории о дисперсии суммы случайных величин и произведений случайной величины на неслучайную /2/ дисперсии компонентов ε и σ можно представить в виде:

$$D[\varepsilon]=\sum_i K_i^2\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varphi_i}\right)^2 D[\varphi_i]+\sum_{i<j}K_iK_j\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varphi_i}\frac{\partial\varepsilon_j}{\partial\varphi_j}R[\Delta\varphi_i,\Delta\varphi_j]. \qquad (3)$$

Здесь вторая группа слагаемых учитывает связь случайных величин $\Delta\varphi_i$ ($i = 1,\ldots,n$). Эта связь проявляется для РТ, собранных на общей подложке. В общем случае погрешность $\Delta\varphi_i$ представляет собой сумму

$$\Delta\varphi_i=\Delta\varphi_{общ}+\Delta\varphi_{iч}. \qquad (4)$$

Первое слагаемое характеризует общий поворот РТ в целом от заданного положения. Его дисперсия - $D[\Delta\varphi_{общ}]$. Второе слагаемое - частная погрешность для каждого ТР. Ее дисперсия $D[\Delta\varphi_{iч}]$ для всех РТ одинакова. Погрешности $\Delta\varphi_{iч}$ некоррелированы. Можно установить, что корреляционный момент погрешностей $\Delta\varphi_i$ и $\Delta\varphi_j$ $R[\Delta\varphi_i,\Delta\varphi_j]=D[\Delta\varphi_{общ}]$определяется общей частью погрешностей $\Delta\varphi_i$. При использовании формулы (3) удобно выразить производные через главные деформации (ε_u и ε_v):

$$\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varphi_i}=(\varepsilon_v-\varepsilon_u)\cdot\sin^2 2(\varphi_i-\alpha). \qquad (5)$$

Такой подход позволяет установить зависимость дисперсий компонентов деформаций или напряжений от величин главных напряжений и положения главной оси относительно базовой оси, выбранной на объекте. Положение главной оси относительно базовой характеризуется углом α между этими осями.

Исследуем дисперсию $D[\varepsilon]$ для РТ из трех датчиков с номинальными величинами углов $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$, $\varphi_3 = 120^\circ$. Для определения компонентов деформаций и напряжений для РТ такой конфигурации служат формулы

$$\varepsilon_x=\varepsilon_1, \qquad \sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(1-\frac{\mu}{3}\right)\varepsilon_1+\frac{2}{3}\varepsilon_2+\frac{2}{3}\varepsilon_3\right],$$

$$\varepsilon_y=-\frac{1}{3}\varepsilon_1+\frac{2}{3}\varepsilon_2+\frac{2}{3}\varepsilon_3, \qquad \sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\left(-\frac{1}{3}+\mu\right)\varepsilon_1+\frac{2}{3}\varepsilon_2+\frac{2}{3}\varepsilon_3\right],$$

$$\varepsilon_{xy}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon_2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\varepsilon_3, \qquad \tau_{xy}=G\varepsilon_{xy}.$$

Из этих формул определяем коэффициенты K_i. Так, при определении ε_x имеем $K_1 = 1$, $K_2 = K_3 = 0$, при определении ε_y – $K_1 = -\frac{1}{3}$, $K_2 = \frac{2}{3}$, $K_3 = \frac{2}{3}$ и т.д. Некоторые из коэффициентов зависят от значения коэффициента Пуассона μ, который в дальнейшем принят равным 0,3.

Из формулы (5) получим

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varphi_1} = -(\varepsilon_v - \varepsilon_u)\sin 2\alpha,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \varphi_2} = (\varepsilon_v - \varepsilon_u)\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha\right),$$

$$\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial \varphi_3} = (\varepsilon_v - \varepsilon_u)\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha\right).$$

Подставляя найденные производные и коэффициенты K_i в (3), получим искомые дисперсии. Так, например,

$$D[\varepsilon_x] = (\varepsilon_u - \varepsilon_v)^2 (0{,}5 - 0{,}5\cos 4\alpha) D[\Delta\varphi_i],$$

$$D[\sigma_y] = E^2 (\varepsilon_u - \varepsilon_v)^2 \{(0{,}538 - 0{,}466\cos 4\alpha) D[\Delta\varphi_{iч}] + (0{,}296 - 0{,}296\cos 4\alpha) D[\Delta\varphi_{общ}]\}.$$

Таким же образом можно рассмотреть различные виды РТ:

1. Одиночный ТР с $\varphi_1 = 0^\circ$ (для определения ε_x).
2. РТ с двумя ТР: $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$ (для определения σ_x и σ_y).
3. РТ с двумя ТР: $\varphi_1 = 45^\circ$ и $\varphi_2 = -45^\circ$ (для определения ε_{xy} или τ_{xy}).
4. РТ с тремя ТР: $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 45^\circ$, $\varphi_3 = 90^\circ$ (для определения всех шести компонентов деформаций и напряжений).
5. РТ с тремя ТР: $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$, $\varphi_3 = 120^\circ$ (была принята ранее в примере).
6. РТ с четырьмя ТР: $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 45^\circ$, $\varphi_3 = 90^\circ$, $\varphi_4 = 135^\circ$ (для определения всех шести компонентов деформаций и напряжений).
7. РТ с четырьмя ТР: $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$, $\varphi_3 = 90^\circ$, $\varphi_4 = 120^\circ$ (для определения всех шести компонентов деформаций и напряжений).
8. РТ с двумя ТР: $\varphi_{1,2} = \pm \operatorname{arctg}\sqrt{\mu}$ (для определения σ_x и ε_{xy}, τ_{xy}). Для всех вариантов конфигураций РТ и всех компонентов (ε, σ) формулы для дисперсий имеют общую структуру:

$$D[\varepsilon] = (\varepsilon_u - \varepsilon_v)^2 \{(M + M\cos 4\alpha) D[\Delta\varphi_{iч}] + (P + Q\cos 4\alpha) D[\Delta\varphi_{общ}]\},$$

$$D[\sigma]=E^2(\varepsilon_u-\varepsilon_v)^2\{(M+N\cos 4\alpha)D[\Delta\varphi_{iч}]+(P+Q\cos 4\alpha)D[\Delta\varphi_{общ}]\}. \quad (6)$$

Коэффициенты M , N , P , Q сведены в таблицу I. Расчеты с использованием этих данных показывают, что погрешность определения деформаций или напряжений может быть достаточно большой. Так, если принять среднеквадратическое отклонение угла φ_1 равным 3^0 ($\sigma[\Delta\varphi_{iч}]=0{,}053$, $D[\Delta\varphi_{iч}]=0{,}0028$), а дисперсию $D[\Delta\varphi_{общ}]$ положить равной нулю, то среднеквадратическое отклонение деформации ε_x может достигать, в зависимости от типа РТ и величины α , значений $\sigma[\varepsilon_x]=(\varepsilon_u-\varepsilon_v)\cdot 0{,}053$, т.е. около 5 % разности главных деформаций. Аналогичное значение для деформации сдвига $\sigma[\varepsilon_{xy}]\leq(\varepsilon_u-\varepsilon_v)\cdot 0{,}106$, т.е. до 10 % указанной разности. Поэтому возникает необходимость поиска способов снижения исследуемых погрешностей. Если по существу задачи не требуется определения всех трех компонентов ε или σ , то целесообразно воспользоваться неполными РТ № I, 2, 3, 8. При этом следует дублировать ТР. Это приведет к снижению вдвое дисперсий, определяемых по данным в таблице I и формулам (6).

На рис.Iа,б,в показаны зависимости от α множителей в формуле (6), имеющих вид $M+N\cos 4\alpha_1$. Заметим, что рассматриваемые множители изменяются в зависимости от α достаточно интенсивно. Ошибки в определении α на величину порядка 20^0 приводят к результату, противоположному желаемому. Поэтому такой подход может оказаться ложным (учитывая, что α должно быть определено до наклейки РТ, т.е. когда возможны существенные погрешности $\Delta\alpha$). Если уверенности в определении α нет, то остается выбор по максимальному значению множителя $M+N\cos 4\alpha$. При таком подходе предпочтительна РТ № 7. Наибольшие величины дисперсий присущи РТ №4.

Из изложенного следует целесообразность исследования возможности снижения дисперсий ε и σ путем выбора подходящих значений углов φ_i , т.е. проектирования оптимальных РТ. В общем случае такая задача пока не решена из-за ее большой трудоемкости. Поэтому можно привести лишь частные результаты. Как известно, определение деформаций ε_{xy} или напряжений τ_{xy} возможно с помощью РТ, состоящей из двух ТР, расположенных к базовой оси под равными углами. На основании формул (6) и (5) можно найти соответствующую дисперсию:

$$D[\varepsilon_{xy}]=(\varepsilon_u-\varepsilon_v)^2\left[\left(1+\frac{1}{tg^2 2\varphi_1}\right)+\left(1-\frac{1}{tg^2 2\varphi_1}\right)\cos 4\alpha\right]D[\Delta\varphi_i].$$

Таблица I

Коэффициенты в формулах для дисперсий компонентов ε и σ, соответствующих погрешностям углов ориентации ТР

№ ТР	ТР	Компонент	M	N	P	Q
I	$\varphi = 0^0$	ε_x	0,5	-0,5	-	-
2	$\varphi = 0^0,\ 90^0$	σ_x	0,658	-0,658	0,296	-0,296
		σ_y	0,658	-0,658	0,296	-0,296
3	$\varphi = 45^0,\ -45^0$	ε_{xy}	I	I	0	0
4	$\varphi = 0^0,\ 45^0,\ 90^0$	ε_x	0,5	-0,5	0,5	-0,5
		ε_y	0,5	-0,5	0,5	-0,5
		ε_{xy}	3	I	2	2
		σ_x	0,658	-0,658	0,296	-0,296
		σ_y	0,658	-0,658	0,296	-0,296
5	$\varphi = 0^0,\ 60^0,\ I20^0$	ε_x	0,5	-0,5	0,5	-0,5
		ε_y	0,5	0,I67	0,5	-0,I67
		ε_{xy}	I,33	0,67	2	2
		σ_x	0,385	-0,385	0,296	-0,296
		σ_y	0,539	0,268	0,296	-0,296
6	$\varphi = 0^0,\ 45^0,\ 90^0,\ I35^0$	ε_x	0,375	-0,25	0,5	-0,5
		ε_y	0,375	-0,25	0,5	-0,5
		ε_{xy}	I	I	2	2
		σ_x	0,404	-0,I47	0,296	-0,296
		σ_y	0,404	-0,I47	0,296	-0,296
7	$\varphi = 0^0,\ 60^0,\ 90^0,\ I20^0$	ε_x	0,472	-0,453	0,5	-0,5
		ε_y	0,249	-0,084	0,5	-0,5
		ε_{xy}	I,33	0,667	2	2
		σ_x	0,536	-0,455	0,296	-0,296
		σ_y	0,295	-0,05I	0,296	-0,296
8	$\varphi = \pm 28,7^0$	ε_{xy}	0,4I	0,592	I,98	I,98
		σ_x	0,5I	0,2I4	0,302	-0,288

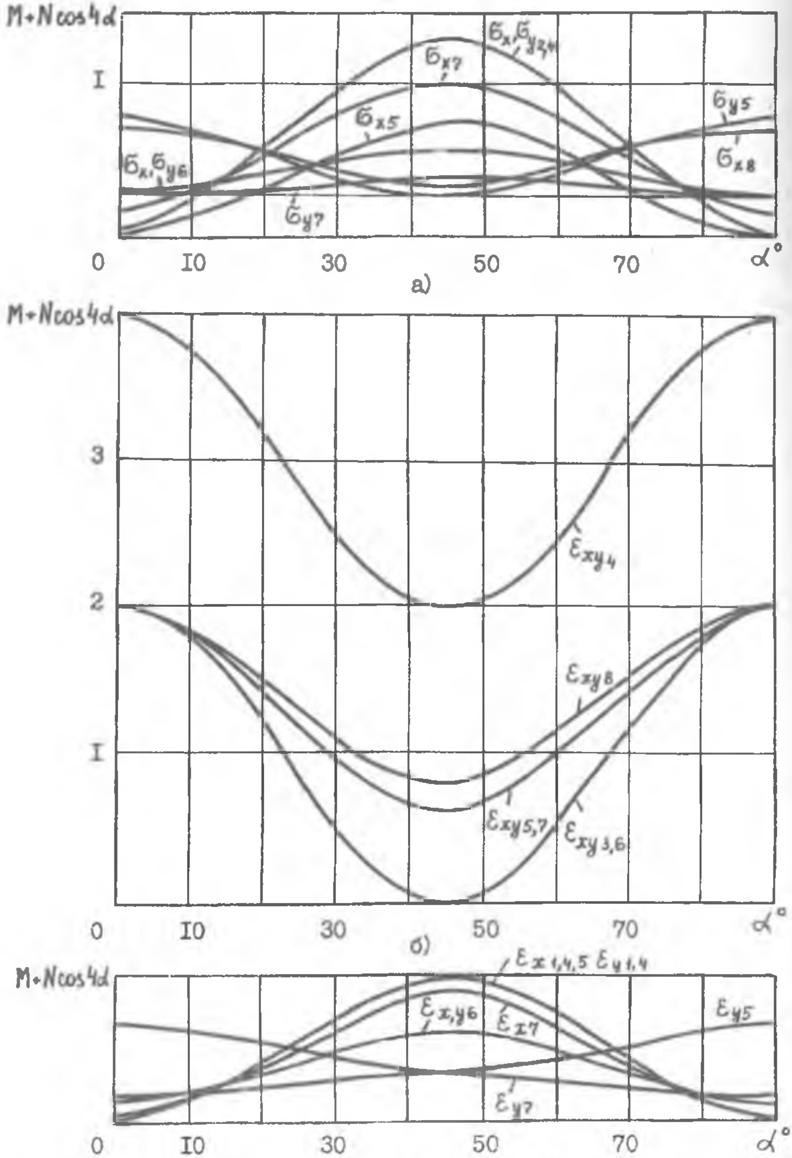
M+Ncos4α
I
0
I0
30
50
70
α°
а)
M+Ncos4α
3
2
I
0
I0
30
50
70
α°
б)
M+Ncos4α
0
I0
30
50
70
α°

Рис. I в)

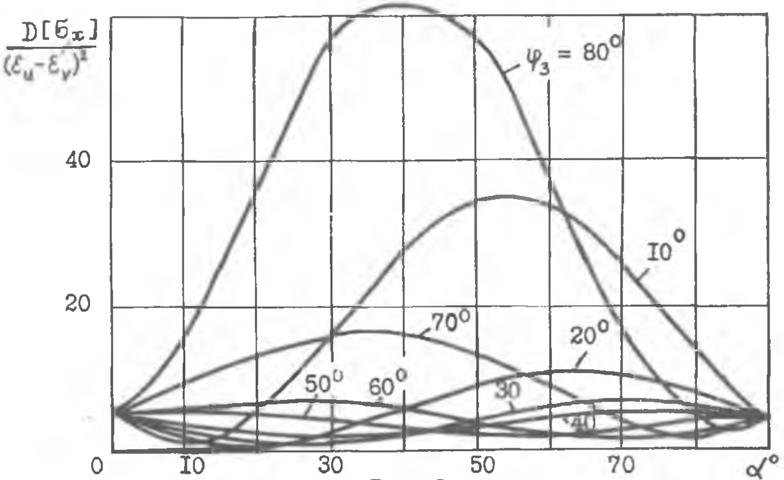

Рис. 2

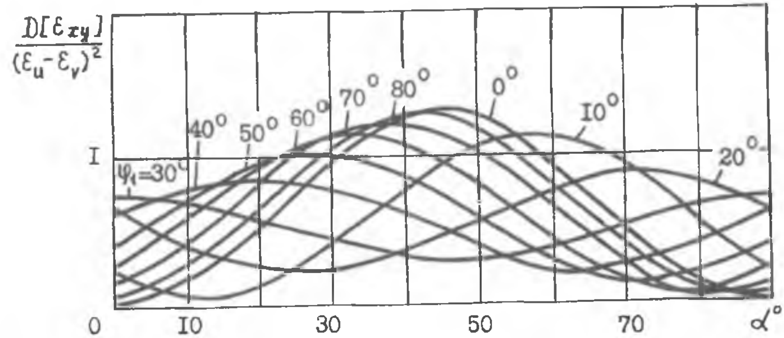

Рис. 3

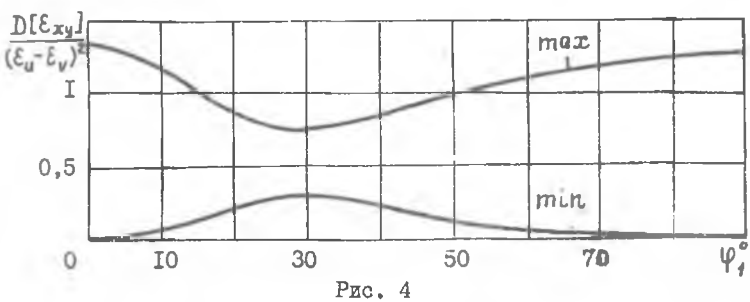

Рис. 4

Из этого выражения следует, что $D[\varepsilon_{xy}]$ будет минимальной, если принять $\varphi_1 = 45^\circ$. Таким образом, применяемая в практике РТ № 3 является в обсуждаемом отношении оптимальной. Исследуем далее РТ, состоящую из трех ТР, причем положение двух из них задано $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$, а угол φ_3 может изменяться. С помощью формул (6) и (5) (при $D[\Delta\varphi_i] = 1$) можно найти:

$$D[\varepsilon_{xy}] = (\varepsilon_u - \varepsilon_v)^2\left[\left(\frac{1}{\cos^2\varphi_3} + \frac{1}{tg^2 2\varphi_3}\right)\sin^2 2\alpha + 4\cos^2 2\alpha - \frac{1}{tg^2 2\varphi_3}\sin 4\alpha\right]D[\Delta\varphi_i]$$

Результаты расчетов по этой формуле приведены на рис.2. Если угол α заранее известен, то по графику рис.2 можно выбрать значение φ_3, при котором исследуемая дисперсия минимальна.

В /3/ показано, что РТ, состоящая из двух ТР, углы установки которых удовлетворяют условию $tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2 = -\mu$, позволяет определить напряжение σ_x. С помощью формул (6) и (5) можно получить выражение для дисперсии

$$D[\sigma_x] = \left(\frac{E(\varepsilon_u - \varepsilon_v)}{(1-\mu^2)(\mu + tg^2\varphi_1)}\right)^2\{0{,}18\,tg^2\varphi_1 + 0{,}545(0{,}09 + tg^4\varphi_1) + [0{,}54\,tg^2\varphi_1 -$$

$$- 0{,}545(0{,}09 + tg^4\varphi_1)]\cos 4\alpha - 0{,}78(0{,}3 - tg^2\varphi_1)\,tg\,\varphi_1 \sin 4\alpha\}.$$

На рис.3,4 представлены результаты расчетов по этой формуле. С помощью графиков на рис.3 возможно нахождение оптимальной РТ из двух ТР при известном α. Из рисунка 4 видно, что хотя РТ № 2 потенциально обладает минимально возможным среди прочих двухкомпонентных РТ значением $D[\sigma_x] = 0$, наименьший диапазон значений $D[\sigma_x]$ характерен для РТ № 8 (φ_1 около 30°).

В заключение отметим, что приведенные исследования позволили выявить влияние погрешностей ориентировки ТР на погрешности определения компонентов деформаций или напряжений, оценить их величину и выработать некоторые рекомендации по их снижению.

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.

2. Михеев Р.А. Погрешности экспериментального определения деформаций и напряжений вследствие неточной ориентации тензорезисторов // Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных

конструкций: Межвуз. сб. Куйбышевск. авиац. ин-т. Куйбышев. 1983. С. 92-97.

3. Михеев Р.А. Общая теория и измерительные свойства тензорозеток // Метрология, 1984., № 7. С.30-36.

УДК 539.3

И.Р.Заверткин, Х.С.Хазанов

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МАТРИЦЫ МАСС В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В СТЕРЖНЯХ

Использование численных методов в задачах распространения волн деформаций приводит к появлению фиктивных осцилляций и дисперсии. На примере распространения продольных волн в стержне рассматривается подход, основанный на представлении матрицы масс в виде линейной комбинации согласованной и диагональной матриц и введении слабого искусственного демпфирования. Показано, что при соответствующем подборе параметров можно существенно повысить точность расчетов.

В результате многократного отражения волн от граничных поверхностей в телах, подверженных импульсным нагрузкам, образуется дифракционное поле, определение которого представляет серьезные математические трудности. Дискретизация среды на конечные элементы, применение шаговых методов интегрирования дифференциальных уравнений по времени приводит к побочным отрицательным эффектам: возникновению фиктивных осцилляций и дисперсии /1/. Использование при моделировании квазирегулярной сетки или уменьшение шага интегрирования по времени /2/ не позволяет существенно улучшить результаты вычислений. Значительного повышения точности решения можно добиться модернизацией структуры используемых конечных элементов. Метод рассмотрен на примере распространения волн вдоль однородного стержня. При дискретизации стержня используются одномерные двухузловые конечные элементы с линейной аппроксимацией перемещений вдоль его оси. Примене-

Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Куйбышев, 1990

18-4209