$B_1 = 0,01903$, $A_2 = -0,01872$, $B_2 = -0,24863$. Остаточные напряжения в поверхностном слое торсионного вала, подсчитанные по формулам (3), показаны на рис.4. Как и следовало ожидать, напряжения в поверхностном слое являются сжимающими. Спад напряжений к поверхности объясняется релаксацией в результате заневоливания кручением

Литература

I. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: Наука, 1970.

УДК 620.I.08

Р.А.Михеев

ПОГРЕШНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ВСЛЕДСТВИЕ НЕТОЧНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ТЕНЗОРЕЗИСТОРОВ

Величины компонентов напряжений и деформаций поверхностного слоя испытываемого объекта, определенные в эксперименте по показаниям тензорезисторов, содержат погрешности различной природы /2/. Одним из их источников является измерительная система. Возникают также погрешности вследствие неточного определения упругих постоянных материала исследуемой конструкции. Целью данной статьи является рассмотрение еще одной разновидности погрешностей вызванных неточной ориентировкой тензорезисторов.

Как известно, например /2/, искомые компоненты деформации (ε_x, ε_y, ε_{xy}) или напряжений (σ_x, σ_y, τ_{xy}) на заданных площадках определяются по деформациям, измеренным тензорезисторами, из соотношений, имеющих вид:

$$\varepsilon = \sum_i K_i \varepsilon_i \, , \tag{I}$$

где ε - искомый компонент (ε или σ); ε_i - результат измерений одним из тензорезисторов.

Коэффициенты K_i определяются углами φ_i между осью тензорезистора и некоторой осью, выбранной на объекте в зависимости от конкретной задачи эксперимента. Так, например, для определения касательного напряжения τ_{xy} на площадке, перпендикулярной к оси OX, при розетке, состоящей из трех тензорезисторов, оси которых составляют углы φ_1, φ_2 и φ_3 с направлением OX, коэффициенты K_i в формуле (I) будут /2/:

$$K_1 = \frac{\sin(\varphi_2+\varphi_3)\sin(\varphi_3-\varphi_2)}{\Delta_\varepsilon} G,$$

$$K_2 = \frac{\sin(\varphi_1+\varphi_3)\sin(\varphi_3-\varphi_1)}{\Delta_\varepsilon} G, \qquad (2)$$

$$K_3 = \frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)\sin(\varphi_2-\varphi_1)}{\Delta_\varepsilon} G$$

$$\Delta_\varepsilon = \sin(\varphi_1-\varphi_3)\sin(\varphi_2-\varphi_3)\sin(\varphi_1-\varphi_2).$$

Углы φ_i практически могут быть известны только с некоторой погрешностью $\Delta\varphi_i$, что и приведет к неточным значениям K_i, а следовательно, и искомой величины $\varepsilon(G)$.

Погрешности $\Delta\varphi_i$ связаны с неопределенностью положения оси каждого тензорезистора. Ось тензорезистора ориентирована по тому связанному с его чувствительной решеткой направлению, удлинение вдоль которого вызывает наибольшее изменение его электрического сопротивления. Это направление для каждого конкретного экземпляра тензорезистора может быть установлено лишь приближенно, так как зависит от его индивидуальных особенностей (отклонений от номинальной конфигурации чувствительной решетки). На практике принимают, что рассматриваемая ось направлена в основном вдоль продольных элементов чувствительной решетки. Так как сами элементы выполнены с некоторыми неточностями, то такое определение является несколько условным и влечет за собой погрешность $\Delta\varphi_i$, даже если последующие измерения углов φ_i выполнить с достаточно высокой точностью.

Можно указать два практически эквивалентных подхода к оценке величины рассматриваемой погрешности компонентов деформаций или напряжений. Прямой способ состоит в следующем. Учтем, что при вычислениях по формулам вида (I) используются значения коэффициентов K_i^p отличающиеся от истинных (K_i^n):

$$K_i^p = K_i^n + \Delta K_i. \qquad (3)$$

Поэтому погрешность определения величин ε или σ составляет:

$$\Delta\varepsilon = \sum_i \Delta K_i \varepsilon_i . \tag{4}$$

Величины ΔK_i приближенно равны

$$\Delta K_i \approx \sum_j \frac{\partial K_i}{\partial \varphi_j} \Delta\varphi_j . \tag{5}$$

Применяя известную из теории вероятности (например, /I/) формулу для определения дисперсии суммы (4) случайных величин ΔK_i получим:

$$D[\varepsilon] = \sum_i \varepsilon_i^2 D[\Delta K_i] + 2\sum_{i<n} \varepsilon_i \varepsilon_n K[\Delta K_i , \Delta K_n] , \tag{6}$$

где $D[\varepsilon]$ - дисперсия определяемого компонента деформации или напряжения; $D[\Delta K_i]$ - дисперсия коэффициента K_i; $K[\Delta K_i, \Delta K_n]$- корреляционный момент случайных величин ΔK_i , ΔK_n , т.е. уклонений коэффициентов K_i для пары различных тензорезисторов.

Для суммы (5) аналогичная формула имеет, учитывая, что $\Delta\varphi_i$ некоррелированы, вид:

$$D[\Delta K_i] = \sum_j \left(\frac{\partial K_i}{\partial \varphi_j}\right)^2 D[\varphi_j] . \tag{7}$$

Корреляционные моменты $K[\Delta K_i , \Delta K_n]$ при математических ожиданиях $M[\Delta K_i] = 0$ представляют собой математические ожидания произведений ΔK_i и ΔK_n :

$$K[\Delta K_i , \Delta K_n] = M[\Delta K_i , \Delta K_n] .$$

Подставляя ΔK_i и ΔK_n по формуле (5), получаем:

$$K[\Delta K_i , \Delta K_n] = M\left[\sum_j \frac{\partial K_i}{\partial \varphi_j} \Delta\varphi_j \sum_p \frac{\partial K_n}{\partial \varphi_p} \Delta\varphi_p\right] = \sum_{j,p} \frac{\partial K_i}{\partial \varphi_j} \frac{\partial K_n}{\partial \varphi_p} M[\Delta\varphi_j \Delta\varphi_p] .$$

При некоррелированных $\Delta\varphi_i$ это выражение принимает вид:

$$K[\Delta K_i , \Delta K_n] = 2\sum_j \left(\frac{\partial K_i}{\partial \varphi_j}\right)^2 D[\Delta\varphi_j] . \tag{8}$$

Таким образом, имея выражение для K_i вида (2) и зная $D[\varphi_i]$

...жно по (6), (7) и (8) вычислить искомые дисперсии.

Другой способ основан на отнесении погрешностей, вызванных ...точностью определения φ_i к измеренным значениям ε_i. Пола...ем, что коэффициенты K_i определены правильно, а измеренные ...начения ε_i содержат соответствующие погрешности $\Delta\varepsilon_i$. Послед...ие можно рассматривать как разность удлинений по направлениям, ...пределяемым значением φ_i^p, принятым при расчете K_i, и дейст...вительным значением φ_i. При таком подходе

$$\Delta\varepsilon = \sum_i K_i^p (\varepsilon_i^n - \varepsilon_i^T) = -\sum_i K_i^p \Delta\varepsilon_i \,, \tag{9}$$

где ε_i^n - измеренное значение ε_i ; ε_i^T - значение ε_i по направ...лению, определяемому величиной φ_i^p.

Величина $\Delta\varepsilon_i$ приближенно равна:

$$\Delta\varepsilon_i = \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varphi_i}\Delta\varphi_i \,. \tag{I0}$$

Снова применяя правило определения дисперсии линейной функ...ции случайных величин к сумме (9) и выражению (I0) и учитывая при ...этом, что $\Delta\varphi_i$ не коррелированы, получим

$$D[\varepsilon] = \sum_i K_i^2 D[\varepsilon_i] \tag{II}$$

$$D[\varepsilon_i] = \left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varphi_i}\right)^2 D[\varphi_i] \,. \tag{I2}$$

Таким образом, искомую оценку погрешности компонента дефор...маций или напряжений можно, имея выражения для K_i, найти из ...выражения (II), подставив туда формулу для $D[\varepsilon_i]$ - (I2). Произ...водную можно найти из известного соотношения

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x \cos^2\varphi_i + \varepsilon_y \sin^2\varphi_i + \varepsilon_{xy}\sin\varphi_i\cos\varphi_i \;;$$

...дифференцируя это выражение, получим

$$\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varphi_i} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\varphi_i + \varepsilon_{xy}\cos 2\varphi_i \,.$$

Можно показать, что оба подхода приводят к одинаковому ре...зультату. Истинные значения искомых величин компонентов ε или σ ...от углов φ_i не зависят. Поэтому дифференцируя (I) по φ, можем ...приравнять производную $\frac{d\varepsilon}{d\varphi_j}$ нулю:

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi_j} = \sum \left(\frac{\partial K_i}{\partial \varphi_j} \varepsilon_i + K_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varphi_j} \right) = 0 ;$$

или учитывая, что $\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varphi_j} = 0$, при $i \neq j$:

$$\sum_i \frac{\partial K_i}{\partial \varphi_j} \varepsilon_i = - K_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varphi_i} .$$

Умножая левую и правую части этого равенства последовательно на $\Delta\varphi_j$ (j = I,2,...) и складывая, получим

$$\sum_j \sum_i \frac{\partial K_i}{\partial \varphi_j} \Delta\varphi_j \varepsilon_i = - \sum_i K_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varphi_i} \Delta\varphi_i . \qquad (I3)$$

С другой стороны, подставляя (5) в (4) и (I0) в (9), получим выражения, совпадающие с левой и правой частями равенства (I3) и, следовательно, равные друг другу.

Используя общий подход для анализа погрешностей тензорозеток, применяемых на практике конфигураций, получим: для одиночного тензорезистора, наклеенного для определения ε_x :

$$D[\varepsilon_x] = \varepsilon_{xy}^2 D[\varphi] ;$$

для розетки из двух тензорезисторов для определения σ_x и σ_y (φ_1 = 0, φ_2 = 90°):

$$D[\sigma_x] = D[\sigma_y] = E^2 \frac{1+\mu^2}{(1-\mu^2)^2} \varepsilon_{xy}^2 D[\varphi] ;$$

для розетки из двух тензорезисторов для определения ε_{xy} или τ_{xy} (φ_1 = 45°, φ_2 = -45°):

$$D[\varepsilon_{xy}] = 2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 D[\varphi] ;$$

для розетки из трех тензорезисторов с углами φ_1 = 0, φ_2 = 45° , φ_3 = 90°:

$$D[\varepsilon_x] = D[\varepsilon_y] = \varepsilon_{xy}^2 D[\varphi]$$

$$D[\varepsilon_{xy}] = 2[\varepsilon_{xy}^2 + 2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2] D[\varphi]$$

$$D[\sigma_x] = D[\sigma_y] = E^2 \frac{1+\mu^2}{(1-\mu^2)^2} \varepsilon_{xy}^2 D[\varphi] ;$$

для розетки из трех тензорезисторов с углами φ_1 = 0, φ_2 = 60° , φ_3 = I20° (так называемая Δ -розетка):

$$D[\varepsilon_x] = \varepsilon_{xy}^2 D[\varphi]$$

$$D[\varepsilon_y] = \left[\frac{\varepsilon_{xy}^2}{3} + \frac{2}{3}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2\right] D[\varphi]$$

$$D[\varepsilon_{xy}] = \frac{2}{3}\left[\varepsilon_{xy}^2 + 3(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2\right] D[\varphi]$$

$$D[\sigma_x] = E^2 \frac{1}{(1-\mu^2)^2}\left[\left(1 - \frac{2}{3}\mu + \frac{\mu^2}{3}\right)\varepsilon_{xy}^2 + \frac{2}{3}\mu^2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2\right] D[\varphi]$$

$$D[\sigma_y] = E^2 \frac{1}{(1-\mu^2)^2}\left[\frac{2}{3}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mu + \mu^2\right)\varepsilon_{xy}^2\right] D[\varphi]$$

$$D[\tau_{xy}] = G^2 D[\varepsilon_{xy}].$$

Полученные формулы позволяют определить погрешности компонентов деформаций или напряжений в зависимости от конфигурации применяемой тензорозетки, напряженно-деформированного состояния объекта испытаний и величины погрешностей углов φ_i .

Воспользуемся результатом для одиночного тензорезистора и найдем относительную среднеквадратическую погрешность (коэффициент вариации):

$$\gamma[\varepsilon_x] = \frac{\sqrt{D[\varepsilon_x]}}{\varepsilon_x} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x}\sqrt{D[\varphi]}\,.$$

Пусть деформированное состояние объекта таково, что $\varepsilon_{xy} \cong \varepsilon_x$, тогда

$$\gamma[\varepsilon_x] = \sqrt{D[\varphi]} = \sigma[\varphi]\,.$$

Если среднеквадратическая погрешность выдерживания угла φ_i составляет всего 1°, то относительная среднеквадратическая погрешность определения ε_x будет около 2 %.

Таким образом, рассматриваемая в статье погрешность может быть существенной по величине, а к точности наклейки тензорезисторов должны предъявляться высокие требования.

Л и т е р а т у р а

I. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука,1969.-576с.

2. Михеев Р.А. К вопросу оптимизации розеток тензорезисторов, используемых при экспериментальных исследованиях. - В кн.: Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. - М.: МАИ, 1981.