

УДК 539.3:629.7

В.В.Власов, М.Д.Коваленко

ПЕРЕДАЧА СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ ОТ КРАЕВОГО  
РЕБРА ЖЕСТКОСТИ К ЛИСТУ

Рассматривается задача о передаче нагрузки от краевого ребра жесткости к полубесконечной плоскости, непрерывно скрепленной с ребром вдоль прямолинейной границы, при трех различных вариантах расчетной модели ребра: 1) ребро рассматривается как одномерная упругая линия, работающая на изгиб и на растяжение-сжатие; 2) ребро жесткости рассматривается как балка конечной ширины; 3) ребро жесткости рассматривается как полоса конечной ширины, находящаяся в условиях плоского напряженного состояния. Приводятся асимптотические формулы для напряжений, справедливые на достаточном удалении от места приложения нагрузки, а также численные результаты, характеризующие поведение напряжений по месту стыка ребра и пластины для всех трех моделей ребра.

Исследуется влияние уточнений моделей ребра на распределение напряжений в листе. Решение строится по методу начальных функций [1] с последующим использованием интегрального преобразования Фурье.

I. Приближенное решение

Начнем рассмотрение задачи с наиболее простого случая упругой полуплоскости, подкрепленной одномерным ребром. При этом размеры поперечного сечения ребра не учитываются, т.е. ребро считается упругой линией. Жесткости ребра на растяжение-сжатие и на изгиб обозначим соответственно через  $E, f$  и  $E, J$ . Для

листа примем:  $\delta$  - толщина листа,  $G$  - модуль сдвига листа. Будем считать, что в прямоугольных координатах рассматриваемое тело занимает область  $y \geq 0$ ,  $-\infty < x < \infty$  и что внешняя нагрузка представлена сосредоточенной силой  $P$ , приложенной в начале координат и действующей в направлении оси  $y$ .

Связь между перемещениями ребра  $U_0 = Gu(x, 0)$ ,  $V_0 = Gv(x, 0)$  и действующей на него нагрузкой дается элементарными зависимостями сопротивления материалов

$$\frac{E_1 f}{G \delta} \alpha^2 U_0 + \chi_0 = 0, \quad \frac{E_1 \beta}{G \delta} \alpha^4 V_0 - \psi_0 = PH(x), \quad (I.1)$$

где  $H(x)$  - дельта-функция Дирака, а через  $\alpha$  обозначена частная производная по  $x$  над функциями  $U_0$ ,  $V_0$ . Функции  $\chi_0 = \chi_{xy}(x, 0)$ ,  $\psi_0 = \psi_y(x, 0)$ , определенные при  $y = 0$ , можно рассматривать как начальные для полуплоскости. Если при этом существуют интегральные преобразования Фурье  $\bar{\chi}_0$ ,  $\bar{\psi}_0$  от начальных функций, определимые как

$$\bar{\chi}_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_0(x) e^{i\lambda x} dx, \quad \bar{\psi}_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) e^{i\lambda x} dx,$$

то все компоненты вектора перемещений и тензора напряжений для полуплоскости в пространстве Фурье-отображений могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= L_{yy}^0 \bar{\psi}_0 + L_{yx}^0 \bar{\chi}_0, \\ \bar{x} &= L_{xy}^0 \bar{\psi}_0 + L_{xx}^0 \bar{\chi}_0, \\ \bar{u} &= L_{uy}^0 \bar{\psi}_0 + L_{ux}^0 \bar{\chi}_0, \\ \bar{v} &= L_{vy}^0 \bar{\psi}_0 + L_{vx}^0 \bar{\chi}_0, \\ \bar{\sigma}_x &= A_y^0 \bar{\psi}_0 + A_x^0 \bar{\chi}_0. \end{aligned} \quad (I.2)$$

Здесь введены алгебраические выражения

$$L_{yy}^0 = (1 + |\lambda|y) e^{-|\lambda|y}; \quad L_{yx}^0 = L_{xy}^0 = i\lambda y e^{-|\lambda|y}; \quad L_{xx}^0 = A_y^0 = (1 - |\lambda|y) e^{-|\lambda|y};$$

$$L_{uy}^0 = i \left[ \frac{1-\nu}{2(1+\nu)\lambda} - \frac{|\lambda|y}{2} \right] e^{-|\lambda|y}; \quad L_{ux}^0 = - \left[ \frac{1}{|\lambda|(1+\nu)} - \frac{y}{2} \right] e^{-|\lambda|y};$$

$$v_y^0 = - \left[ \frac{1}{|\lambda| (1+\nu)} + \frac{y}{2} \right] e^{-|\lambda| y}; \quad L_{vx}^0 = -i \left[ \frac{1-\nu}{2(1+\nu)\lambda} + \frac{|\lambda| y}{\lambda} \frac{y}{2} \right] e^{-|\lambda| y};$$

$$A_x^0 = i \left( 2 \frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y \right) e^{-|\lambda| y}. \quad (I.3)$$

Последние могут быть получены из решения соответствующей граничной задачи в пространстве Фурье-отображений для системы дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях.

Умножая уравнения (I.1) на  $e^{i\lambda x}$  и интегрируя по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , получим систему равенств, которые после интегрирования по частям переходят в систему обыкновенных алгебраических уравнений относительно трансформант  $\bar{X}_0(\lambda), \bar{Y}_0(\lambda), \bar{U}_0(\lambda), \bar{V}_0(\lambda)$ . Заменяя в полученной таким образом системе  $\bar{U}_0$  и  $\bar{V}_0$  их выражениями в соответствии с (I.2), (I.3), приходим к системе двух уравнений относительно неизвестных функций  $\bar{Y}_0$  и  $\bar{X}_0$ .

$$\begin{aligned} - \frac{c\lambda(1-\nu)}{2(1+\nu)} i \bar{Y}_0 + \frac{c\lambda+1+\nu}{1+\nu} \bar{X}_0 &= 0, \\ \frac{d\lambda^3+1+\nu}{1+\nu} \bar{Y}_0 + \frac{d\lambda^3(1-\nu)}{2(1+\nu)} i \bar{X}_0 &= P, \end{aligned}$$

откуда найдем

$$\begin{aligned} \bar{Y}_0 &= P \frac{c\lambda+1+\nu}{d\lambda^3 + cd \frac{3-\nu}{4} \lambda^4 + c\lambda+1+\nu}, \\ \bar{X}_0 &= iP \frac{c\lambda \frac{1-\nu}{2}}{d\lambda^3 + cd \frac{3-\nu}{4} \lambda^4 + c\lambda+1+\nu}. \end{aligned}$$

Окончательное решение рассматриваемой задачи может быть получено теперь с помощью общих зависимостей (I.2) и формул обращения [2].

Ниже приводятся только формулы для напряжений в листе.

$$\tau_{xy} = - \frac{(1+\nu)P}{\pi \delta^2} \int_0^{\infty} \frac{\frac{1-\nu}{2(1+\nu)} K_1 \tilde{\mu} + \tilde{\eta} \tilde{\mu} \left(1 + \frac{K_1 \tilde{\mu}}{2}\right)}{K_2 \tilde{\mu}^3 + K_1 K_2 \frac{3-\nu}{4} \tilde{\mu}^4 + K_1 \tilde{\mu} + 1+\nu} e^{-\tilde{\mu} \tilde{z}} \sin \tilde{\mu} \tilde{\xi} d\tilde{\mu},$$

$$\sigma_x = \frac{(1+\nu)P}{\pi \delta^2} \int_0^{\infty} \frac{\frac{\nu}{1+\nu} K_1 \tilde{\mu} + 1 - \tilde{\eta} \tilde{\mu} \left(1 + \frac{1}{2} K_1 \tilde{\mu}\right)}{K_2 \tilde{\mu}^3 + K_1 K_2 \frac{3-\nu}{4} \tilde{\mu}^4 + K_1 \tilde{\mu} + 1+\nu} e^{-\tilde{\mu} \tilde{z}} \cos \tilde{\mu} \tilde{\xi} d\tilde{\mu},$$

$$\sigma_y = \frac{(1+\nu)P}{\pi\delta^2} \int_0^{\infty} \frac{(K_1 \frac{3-\nu}{4} + 1)\tilde{\mu}}{K_2\tilde{\mu}^3 + K_1K_2 \frac{3-\nu}{4} \tilde{\mu}^4 + K_1\tilde{\mu} + 1+\nu} e^{-\tilde{\mu}\tilde{\eta}} \cos\tilde{\mu}\tilde{\xi} d\tilde{\mu} \quad (I.4)$$

где  $K_1 = \frac{E_1\beta}{G\delta^2}$  и  $K_2 = \frac{E_1\beta}{G\delta^4}$  - безразмерные жесткости ребра соответственно на растяжение-сжатие и на изгиб, кроме того

$$\tilde{\mu} = \lambda\delta, \quad \tilde{\eta} = \frac{y}{\delta}, \quad \tilde{\xi} = \frac{x}{\delta}.$$

Применительно к ребру прямоугольного поперечного сечения высоты  $h_1$  и толщины  $\delta_1$  формулы (I.4) можно привести к виду

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{\pi\delta h_1} \int_0^{\infty} [(1-\nu)n\mu + \eta\mu + (1+\nu)n\eta\mu^2] e^{-\mu\eta} \frac{\sin\xi\mu}{D_1} d\mu,$$

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi\delta h_1} \int_0^{\infty} [2\nu n\mu + 1 - \eta\mu - (1+\nu)n\eta\mu^2] e^{-\mu\eta} \frac{\cos\xi\mu}{D_1} d\mu,$$

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi\delta h_1} \int_0^{\infty} [2n\mu + \eta\mu + (1+\nu)n\eta\mu^2] e^{-\mu\eta} \frac{\cos\xi\mu}{D_1} d\mu.$$

Здесь

$$\mu = \lambda h_1, \quad n = \frac{G_1\delta_1}{G\delta}, \quad \eta = \frac{y}{h_1}, \quad \xi = \frac{x}{h_1},$$

$$D_1 = \frac{n\mu^3}{6} + \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{12} n^2\mu^4 + 2n\mu + 1. \quad (I.5)$$

Для продольных изгибающих моментов  $M$  в ребре на основе известного дифференциального соотношения получим выражение

$$M = -\frac{E_1\beta}{G} \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{Ph_1}{6\pi} n \int_0^{\infty} \left[ \mu + \frac{1}{2}(3-\nu)(1+\nu)n\mu^2 \right] \frac{\cos\xi\mu}{D_1} d\mu.$$

## 2. Промежуточное решение

С помощью описанной методики нетрудно получить решение аналогичной краевой задачи для подкрепляющего ребра конечной высоты  $h_1$ . Ребро рассматривается как балка прямоугольного сечения, нейтральная ось которой лежит на расстоянии  $\frac{h_1}{2}$  от линии склейки ребра и пластины.

Окончательные формулы для напряжений в листе и продольного изгибающего момента в ребре жесткости имеют вид

$$V_{xy} = -\frac{P}{\pi \delta h_1} \int_0^{\infty} [(1-\nu)\eta\mu + \eta\mu + (1+\nu)n\eta\mu^2 + \eta\mu^2 - \frac{1+\nu}{2}n\eta\mu^3] e^{-\eta\mu} \frac{\sin \xi\mu}{D_2} d\mu,$$

$$V_x = \frac{P}{\pi \delta h_1} \int_0^{\infty} [2\nu\eta\mu + 1 - \eta\mu - (1+\nu)n\eta\mu^2 + \frac{3+\nu}{2}\eta\mu^2 - \frac{1+\nu}{2}n\eta\mu^3] e^{-\eta\mu} \frac{\cos \xi\mu}{D_2} d\mu,$$

$$V_y = \frac{P}{\pi \delta h_1} \int_0^{\infty} [2\eta\mu + 1 + \eta\mu + (1+\nu)n\eta\mu^2 + \frac{1-\nu}{2}\eta\mu^2 - \frac{1+\nu}{2}n\eta\mu^3] e^{-\eta\mu} \frac{\cos \xi\mu}{D_2} d\mu,$$

$$M = -Ph_1 \frac{n}{6\pi} \int_0^{\infty} \left[ \mu + \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{2} \eta\mu^2 \right] \frac{\cos \xi\mu}{D_2} d\mu,$$

причем

$$D_2 = \frac{2}{3} \eta\mu^3 + \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{12} n^2 \mu^4 + 2\eta\mu + 1 + (1-\nu)\eta\mu^2.$$

Следует отметить, что приводимое в п.п. 1, 2 применение преобразования Фурье является чисто формальным, т.к. поля перемещений не исчезают на бесконечности ( $|x| \rightarrow \infty$ ). Строгий вывод решения данной задачи может быть получен с использованием обобщенного преобразования Фурье [2]. В справедливости решения, полученного формальным путем, можно убедиться апостериорной проверкой окончательных результатов.

### 3. Точное решение

Пусть полуплоскость ( $y \geq 0, -\infty < x < \infty$ ) непрерывно спаяна вдоль прямолинейной границы  $y = 0$  с ребром высоты  $h_1$  ( $0 \leq y_1 \leq h_1, -\infty < x < \infty$ ). К границе ребра  $y_1 = h_1, x = 0$  приложена сосредоточенная сила, действующая в направлении оси  $y$  (рис. I).

В отличие от п.п. 1, 2 ребро жесткости рассматривается как бесконечная, упругая полоса, и теория о обобщенных плоских напряженных состояниях одинаково строго применяется как к полуплоскости, так и к подкрепляющему ребру.

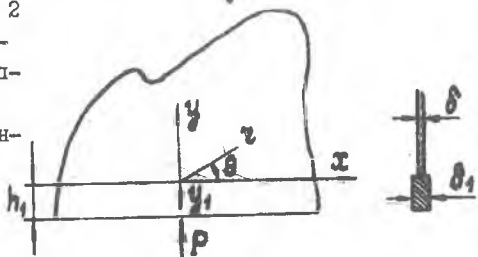


Рис. I

Примем:  $G, G_1$  - модули сдвига,  $\delta, \delta_1$  - толщины, причем величины без индекса относятся к полуплоскости, величины с индексом - к полосе.

Эффективное решение рассматриваемой задачи может быть получено с помощью метода начальных функций и интегрального преобразования Фурье.

Обозначим через  $Y_0 = G_y(x, 0)$ ,  $X_0 = \tau_{xy}(x, 0)$ ,  $U_0 = G_u(x, 0)$ ,  $V_0 = G_v(x, 0)$  компоненты контактных усилий и смещений, определенные на линии склейки ребра и пластины. Рассматривая функции  $Y_0, X_0, U_0, V_0$  как начальные для полосы и удовлетворяя с помощью общи зависимостей метода начальных функций

$$Y(x, y_1) = L_{yu}(y_1)U_0 + L_{yv}(y_1)V_0 + L_{yx}(y_1)X_0 + L_{yy}(y_1)Y_0,$$

$$X(x, y_1) = L_{xu}(y_1)U_0 + L_{xv}(y_1)V_0 + L_{xx}(y_1)X_0 + L_{xy}(y_1)Y_0, \quad (3.1)$$

$$U(x, y_1) = L_{uu}(y_1)U_0 + L_{uv}(y_1)V_0 + L_{ux}(y_1)X_0 + L_{uy}(y_1)Y_0,$$

$$V(x, y_1) = L_{vu}(y_1)U_0 + L_{vv}(y_1)V_0 + L_{vx}(y_1)X_0 + L_{vy}(y_1)Y_0,$$

граничным условиям при  $y_1 = h_1$

$$y = -\frac{P}{\delta_1} H(x), \quad X = 0$$

придем к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечно высокого порядка для определения искомых начальных функций. Соответствующая ей система алгебраических уравнений в пространстве Фурье-отображений относительно трансформант  $\bar{Y}_0(\lambda), \bar{X}_0(\lambda), \bar{U}_0(\lambda), \bar{V}_0(\lambda)$  имеет вид

$$\bar{L}_{yu}(h_1)\bar{U}_0 + \bar{L}_{yv}(h_1)\bar{V}_0 + \bar{L}_{yx}(h_1)\bar{X}_0 + \bar{L}_{yy}(h_1)\bar{Y}_0 = -\frac{P}{\delta_1},$$

$$\bar{L}_{xu}(h_1)\bar{U}_0 + \bar{L}_{xv}(h_1)\bar{V}_0 + \bar{L}_{xx}(h_1)\bar{X}_0 + \bar{L}_{xy}(h_1)\bar{Y}_0 = 0, \quad (3.2)$$

где  $\bar{L}_{yu}(h_1), \bar{L}_{yv}(h_1)$  и т.д. - алгебраические выражения, получаемые из соответствующих формул для дифференциальных операторов заменой в них, в соответствии со свойством преобразования Фурье,  $\lambda$  на  $-i\lambda$ . С другой стороны, пусть  $Y_0^*, X_0^*, U_0^* = G_u, V_0^* = G_v$  - начальные функции для полуплоскости. В силу условий склейки имеем

$$Y_0^* = \frac{\delta_1}{\delta} Y_0, \quad X_0^* = -\frac{\delta_1}{\delta} X_0, \quad U_0^* = \frac{G}{G_1} U_0, \quad V_0^* = -\frac{G}{G_1} V_0. \quad (3.3)$$

В пространстве Фурье-отображений равенства (3.3) заменяются следующими:

$$\bar{y}_0^* = \frac{\delta_1}{\delta} \bar{y}_0, \quad \bar{x}_0^* = -\frac{\delta_1}{\delta} \bar{x}_0, \quad \bar{u}_0^* = \frac{G}{G_1} \bar{u}_0, \quad \bar{v}_0^* = -\frac{G}{G_1} \bar{v}_0. \quad (3.4)$$

Выразив  $\bar{u}_0^*$  и  $\bar{v}_0^*$  через  $\bar{y}_0^*$ ,  $\bar{x}_0^*$  с помощью соотношений (1.2), а  $\bar{y}_0$ ,  $\bar{x}_0$ ,  $\bar{u}_0$  и  $\bar{v}_0$  с помощью (3.4) через  $\bar{y}_0^*$  и  $\bar{x}_0^*$  и подставляя полученные таким образом зависимости в (3.2), придем к искомой системе алгебраических уравнений для определения трансформант  $\bar{y}_0^*$  и  $\bar{x}_0^*$ .

Окончательные выражения для смещений и напряжений в полуплоскости получаются затем с использованием (1.2) и формул обращения.

Точно так же могут быть найдены напряжения и перемещения в полудиске, с той лишь разницей, что вместо (1.2) следует воспользоваться общими зависимостями метода начальных функций (3.1).

Ниже приводятся только формулы для напряжений в полуплоскости и изгибающего момента в ребре:

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{\pi \delta h_1} \int_0^{\infty} (a_1 \bar{L}_{xu} + a_2 \bar{L}_{xv} + a_3 \bar{L}_{xy} + a_4 \bar{L}_{xx}) e^{-\gamma \mu} \frac{\sin \xi \mu}{D_3} d\mu,$$

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi \delta h_1} \int_0^{\infty} (b_1 \bar{L}_{xu} + b_2 \bar{L}_{xv} + b_3 \bar{L}_{xy} + b_4 \bar{L}_{xx}) e^{-\gamma \mu} \frac{\cos \xi \mu}{D_3} d\mu,$$

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi \delta h_1} \int_0^{\infty} (c_1 \bar{L}_{xu} + c_2 \bar{L}_{xv} + c_3 \bar{L}_{xy} + c_4 \bar{L}_{xx}) e^{-\gamma \mu} \frac{\cos \xi \mu}{D_5} d\mu.$$

Здесь

$$a_1 = \frac{n}{2} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + \mu \eta \right), \quad a_2 = -i n \left( \frac{1}{1+\nu} - \frac{\mu \eta}{2} \right),$$

$$a_3 = b_4 = -i \mu (1 - \mu \eta), \quad a_4 = -c_3 = \mu^2 \eta,$$

$$b_1 = n \left( \frac{\nu}{1+\nu} - \frac{1}{2} \mu \eta \right), \quad b_2 = i \frac{n}{2} \left( \frac{3+\nu}{1-\nu} - \mu \eta \right),$$

$$b_3 = i \mu (2 - \mu \eta), \quad c_1 = n \left( \frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{2} \mu \eta \right),$$

$$c_2 = -i \frac{n}{2} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} - \mu \eta \right), \quad c_4 = \mu (1 + \mu \eta),$$

$$D_3 = \mu \left\{ -n \left( \mu - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\mu \right) + n^2 \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4} (\operatorname{sh}^2 \mu - \mu^2) + n \left( \mu + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\mu \right) + \right. \\ \left. + \frac{(1+\nu)^2}{4} \mu^2 + c h^2 \mu - \frac{(1-\nu)^2}{4} \operatorname{sh}^2 \mu + \frac{1-\nu}{2} n [(1+\nu) \mu^2 + (1-\nu) \operatorname{sh}^2 \mu] \right\},$$

а через  $\bar{L}_{xu}$ ,  $\bar{L}_{xv}$ ,  $\bar{L}_{xy}$ ,  $\bar{L}_{xx}$ , как и ранее, обозначены алгебраические выражения, получаемые из соответствующих формул для дифференциальных операторов при  $y_1 = h_1$ , путем замены в них  $\alpha$  на  $-i\lambda$ .

#### 4. Асимптотическое поведение приближенного и точного решений

Приведем оценки для безразмерных напряжений  $\tau_{xy}^* = \frac{\tau_{xy} \delta h_1}{\rho}$ ,  $\sigma_x^* = \frac{\sigma_x \delta h_1}{\rho}$ ,  $\sigma_y^* = \frac{\sigma_y \delta h_1}{\rho}$  в полуплоскости в областях, находящихся на достаточном удалении от места приложения нагрузки. Последние легко получить, используя хорошо известные асимптотические разложения интеграла Лапласа [3]. В полярных координатах ( $\rho$ ,  $\theta$ ) показанных на рис. 1, результаты оценки можно записать следующим образом.

Для приближенного и промежуточного решений при  $\rho \rightarrow \infty$  ( $\rho = \frac{z}{h_1}$ ).

$$\tau_{xy}^* = -\frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\rho} + \frac{n(1-\nu)}{2\rho^2} \sin 4\theta + O(\rho^{-3}) \right],$$

$$\sigma_x^* = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\rho} + \frac{n(1-\nu)}{2\rho^2} (\cos 4\theta + \cos 2\theta) + O(\rho^{-3}) \right],$$

$$\sigma_y^* = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin^3 \theta}{\rho} - \frac{n(1-\nu)}{2\rho^2} (\cos 4\theta - \cos 2\theta) + O(\rho^{-3}) \right]. \quad (4.1)$$

Для точного решения при  $\rho \rightarrow \infty$

$$\tau_{xy}^* = -\frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\rho} + \frac{n(1-\nu)}{2\rho^2} \sin 4\theta \left( 1 + \frac{\nu}{n(1-\nu)} \right) + O(\rho^{-3}) \right],$$

$$\sigma_x^* = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\rho} + \frac{n(1-\nu)}{2\rho^2} \left( 1 + \frac{\nu}{n(1-\nu)} \right) (\cos 4\theta + \cos 2\theta) + O(\rho^{-3}) \right],$$



$$\sigma = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\sin^3 \theta}{\rho} - \frac{n(1-\nu)}{2\rho^2} \left( 1 + \frac{\nu}{n(1-\nu)} \right) (\cos 4\theta - \cos 2\theta) + O(\rho^{-3}) \right]. \quad (4.2)$$

Интересно сравнить поведение напряжений при  $\rho \rightarrow \infty$ , описываемое равенствами (4.1) и (4.2), с соответствующими выражениями решения классической задачи плоской упругости для полубесконечного листа, подверженного действию нормальной нагрузки  $P$  в полярных координатах. Последнее решение, записанное в безразмерной форме, имеет вид

$$\sigma_y^* = \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\rho}, \quad \sigma_x^* = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \theta \cos^3 \theta}{\rho}, \quad \tau_{xy}^* = \frac{2}{\pi} \frac{\sin^3 \theta}{\rho}. \quad (4.3)$$

Выражения (4.1)–(4.3) показывают, что величины напряжений в листе, полученные на основе использования трех различных моделей ребра жесткости, совпадают до членов порядка  $O(\rho^{-1})$  при  $\rho \rightarrow \infty$ . Величинами, соответствующими непосредственному приложению нагрузки к листу. Асимптотические напряжения в листе для приближенного и промежуточного решения совпадают до членов порядка  $O(\rho^{-1})$ . С другой стороны, отношение членов порядка  $O(\rho^{-2})$  в точном решении к соответствующим членам в приближенных решениях составляет  $1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, различие в приближенных и точных значениях для напряжений в листе на относительно больших расстояниях от места приложения нагрузки становится менее значительным с увеличением относительной жесткости ребра  $n$ .

## 5. Численные результаты

Вычисления были проведены на ЭЕМ М-222 в предположении, что коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Результаты вычислений, представленные на рис. 2 и 3, дают количественную информацию о распределении безразмерных напряжений  $\sigma_y^*$ ,  $\sigma_x^*$ ,  $\tau_{xy}^*$  в листе вдоль поверхности сопряжения листа с ребром жесткости. Сплошной линией изображены кривые, отвечающие "точному" решению, прерывистой – кривые, соответствующие приближенному решению. Графики для промежуточного решения не приводятся, ибо их включение могло бы несколько запутать общую картину.

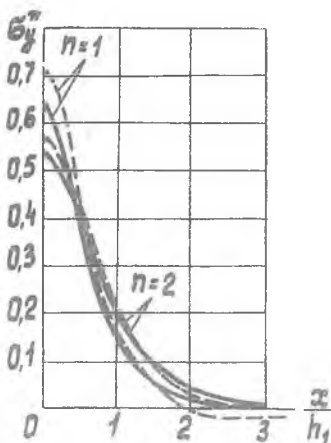


Рис. 2

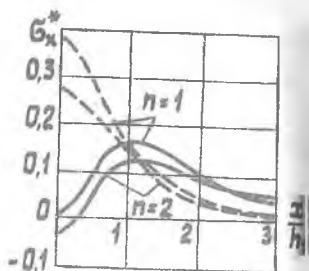


Рис. 3

Согласно рис. 2 и 3 характер изменения напряжений вблизи места приложения нагрузки довольно сильно зависит от выбора модели ребра жесткости. В этой области оба приближенных решения дают завышенные значения для напряжений. В противоположность этому и в соответствии с асимптотическими разложениями п. 4 в три решения практически совпадают за пределами области  $x = 3h_1$  как стремящиеся к 0 при  $\rho \rightarrow \infty$ .

### Л и т е р а т у р а

1. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. М., Стройиздат, 1975.
2. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. ИТТИ, М., 1948.
3. Эрдейи А. Асимптотические разложения. Изд. физ.-мат. литературы, М., 1962.