

УДК 629.7.015.4

Е.К.Липин, В.И.Голован,  
В.И.Новосельцев, В.С.Литвинов, Б.И.Сахаров

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИЛОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
С УЧЕТОМ КОНСТРУКТИВНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Математическое описание задачи оптимального проектирования сложных силовых конструкций можно составить из трех взаимосвязанных частей. Первая часть — это обеспечение весового совершенства конструкции, которое включает в себя требование минимизации целевой функции. Вторая часть — это учет физических и геометрических ограничений, которые определяются требованиями прочности, устойчивости, конструктивными и технологическими соображениями. К третьей части мы будем относить уравнения состояния, которые включают в себя уравнения равновесия, уравнения упругой устойчивости элементов конструкции и физические зависимости между напряжениями и деформациями. Согласно [1] силовая конструкция будет иметь минимальный вес и обладать при этом максимальной жесткостью, если в качестве критерия оптимальности принять условие равномерного распределения удельной энергии деформации по объему силовой конструкции. В соответствии с этим первую часть математического описания задачи оптимального проектирования конструкций максимальной жесткости будет составлять требование минимизации функционала энергии деформации. Функционал энергии деформации для тонкостенной конструкции, составленной из обшивки (Н), поясов силовых элементов (F), стенок (Т), при линейной зависимости между напряжениями и деформациями будет иметь следующий вид:

$$U = \int_S h v_H ds + \sum_{k=1}^n \int_{\xi_k} f_k v_{Fk} dz_k + \sum_{e=1}^m \int_{S_e} t_e v_{Te} ds_e, \quad (I)$$

где  $h$  — толщина обшивки,  $f$  — площадь пояса,  $t$  — толщина стенок;  $v_H$ ,  $v_F$ ,  $v_T$  — удельная энергия деформации в элементах силовой конструкции  $H$ ,  $F$ ,  $T$ .

В отсутствие физических ограничений будем рассматривать ограничения по прочности, а в качестве геометрических — ограничения, накладываемые на сечения силовых элементов по конструктивным или технологическим соображениям.

Для оценки прочности элементов силовой конструкции, находящихся в условиях сложного напряженного состояния, часто используются энергетические критерии прочности — это критерий полной энергии деформации или критерий энергии формоизменения [2]. Следует отметить, что критерий энергии формоизменения достаточно хорошо аппроксимирует экспериментальные данные по предельному напряженному состоянию для большинства конструкционных материалов. Поэтому для решения задачи оптимального проектирования целесообразно рассмотреть минимизацию функционала энергии формоизменения

Обозначим через  $U_{нф}$ ,  $U_{фг}$ ,  $U_{тф}$  удельную энергию изменения формы для элементов силовой конструкции  $H$ ,  $F$ ,  $T$ .

Требования прочности для этих элементов могут быть сформулированы в следующем виде:

$$U_{нф} \leq \lambda_{ф} K_H, \quad \{U_{фг}\} \leq \lambda_{ф} \{K_F\}, \quad \{U_{тф}\} \leq \lambda_{ф} \{K_T\}, \quad (2)$$

где  $\lambda_{ф}$  — предельное значение удельной энергии изменения формы, определяемое по критерию энергии формоизменения, для некоторой точки силовой конструкции;  $K_H$ ,  $\{K_F\}$ ,  $\{K_T\}$  — параметры, значения которых характеризуют отличие требований прочности в элементах силовой конструкции от требований прочности, определяемых предельным значением  $\lambda_{ф}$ .

Геометрические ограничения могут быть записаны в виде:

$$h \geq h_0, \quad \{f\} \geq \{f_0\}, \quad \{t\} \geq \{t_0\}, \quad (3)$$

где  $h_0$ ,  $\{f_0\}$ ,  $\{t_0\}$  — минимально допустимые значения проектных параметров, определяемые из конструктивных или технологических соображений. В качестве уравнений состояния будем рассматривать основные соотношения метода конечных элементов, который в настоящее время широко используется для расчета напряженно-деформированного состояния сложных силовых конструкций [3, 4]. В интерпретации метода перемещений разрешающее уравнение метода конечных элементов представляется в виде

$$[K]\{z\} = \{R\}, \quad (4)$$

где:  $[K]$  - матрица жесткости,  $\{z\}$  - вектор неизвестных перемещений,  $\{R\}$  - вектор внешних сил.

По решению уравнения (4)  $\{z\} = [K]^{-1} \{R\}$  внутренние усилия (напряжения) в элементах силовой конструкции, необходимые для пересчета проектных параметров при оптимизации, определяются с помощью зависимостей, априори установленных для каждого конечного элемента. Использование метода конечных элементов при проектировании позволяет не повторять расчета деформированного состояния всей силовой конструкции, а лишь проводить некоторые дополнительные расчеты, корректирующие распределение перемещений (усилий) в исходной конструкции в соответствии с изменением значений проектных параметров [4].

Все три части математического описания задачи оптимального проектирования увязываются оптимизационным процессом, который включает в себя метод минимизации целевой функции при наличии ограничений. В работах [5], [6] разработан итерационный метод минимизации функционала энергии деформации (энергии формоизменения), который позволяет за малое число итераций получить оптимальное распределение проектных параметров в элементах сложной силовой конструкции при наличии конструктивных ограничений и ограничений по прочности. Для выполнения требований прочности общего вида (2) при минимизации функционала (I) использовалось модифицированное условие постоянства объема силового материала [5]. Данное условие позволяет получить силовую конструкцию с минимальной энергией деформации (формоизменения) при удовлетворении в ее элементах требований прочности (2), но при этом в итерационном процессе лишь косвенно отражается условие постоянства объема материала конструкции. Для того чтобы при минимизации функционала (I) сохранить условие постоянства объема и при этом в элементах силовой конструкции обеспечить выполнение требований прочности, введем вместо (2) условия связи

$$\frac{N_H^2}{\alpha_H h^2} \leq \lambda_F K_H, \quad \left\{ \frac{N_F^2}{\alpha_F f^2} \right\} \leq \lambda_F \{K_F\}, \quad \left\{ \frac{N_T^2}{\alpha_T t^2} \right\} \leq \lambda_F \{K_T\}, \quad (5)$$

где

$$N_H^2 = \alpha_H h^2 v_H, \quad \{N_F^2\} = \{\alpha_F f^2 v_F\}, \quad \{N_T^2\} = \{\alpha_T t^2 v_T\} -$$

— квадраты эквивалентных усилий, возникающих в элементах силовой конструкции;  $\alpha_H$ ,  $\alpha_F$ ,  $\alpha_T$  - упругие постоянные, которые по критерию полной энергии деформации равны

$$\alpha_H = 2E_H, \quad \alpha_F = 2E_F, \quad \alpha_T = 2E_T,$$

а по критерию энергии формоизменения равны

$$\alpha_{H\Phi} = \frac{3E_H}{1+\mu_H}, \quad \{\alpha_{F\Phi}\} = \left\{ \frac{3E_F}{1+\mu_F} \right\}, \quad \{\alpha_{T\Phi}\} = \left\{ \frac{3E_T}{1+\mu_T} \right\},$$

$E_H, E_F, E_T$ ;  $\mu_H, \mu_F, \mu_T$  - модули упругости и коэффициенты Пуассона для материала элементов  $H, F, T$ .

Предельное значение удельной энергии изменения формы  $\lambda_\Phi$  для некоторой точки, например элемента  $H$  силовой конструкции, через эквивалентное усилие определяется по формуле

$$\alpha_\Phi = \frac{N_{H\Phi}^2}{\alpha_{H\Phi} h_\Phi^2} \quad (6)$$

Неравенства (5) с учетом (6) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\frac{N_H}{h} \leq \left( \frac{K_H \alpha_H}{\alpha_{H\Phi}} \right)^{1/2} \frac{N_{H\Phi}}{h_\Phi}, \quad \left\{ \frac{N_F}{f} \right\} \leq \frac{N_{H\Phi}}{h_\Phi} \left\{ \left( \frac{K_F \alpha_F}{\alpha_{H\Phi}} \right)^{1/2} \right\}, \quad \left\{ \frac{N_T}{t} \right\} \leq \frac{N_{H\Phi}}{h_\Phi} \left\{ \left( \frac{K_T \alpha_T}{\alpha_{H\Phi}} \right)^{1/2} \right\} \quad (7)$$

Предполагая, что усилия  $N_H, \{N_F\}, \{N_T\}$ , возникающие в элементах силовой конструкции, не зависят от распределения проектных параметров  $h, \{f\}, \{t\}$  на каждом шаге итерационного процесса минимизации функционала (I), задачу оптимального проектирования сформулируем следующим образом: найти распределение проектных параметров  $h, \{f\}, \{t\}$  в элементах силовой конструкции  $H, F, T$ , минимизирующее функционал энергии формоизменения

$$U_\Phi = \int_S \frac{N_H^2}{\alpha_{H\Phi} h} ds + \sum_{k=1}^n \int_{E_k} \frac{N_{Fk}^2}{\alpha_{F\Phi} f_k} dz_k + \sum_{e=1}^m \int_{S_e} \frac{N_{Te}^2}{\alpha_{T\Phi} t_e} ds_e, \quad (8)$$

при заданном значении  $V_0$  объема материала в силовой конструкции

$$\varphi = \int_S h ds + \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f_k dz_k + \sum_{e=1}^m \int_{S_e} t_e ds_e - V_0 = 0 \quad (9)$$

и ограничениях (3) и (7).

В силу того, что требования прочности для значения удельной энергии изменения формы  $\lambda_\Phi$  в виде (2) или (7) могут быть удовлетворены при любом значении удельной энергии изменения формы пропорциональным изменением значений проектных параметров  $h, \{f\}, \{t\}$  на величину отношения  $\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_\Phi}}$ , то ограничения по прочности в виде (7) могут быть записаны для любого значения удельной энергии изменения формы в некоторой точке элемента  $H$ .

Наличие конструктивных ограничений (3) в значительной степени усложняет минимизацию функционала (8). Однако при некоторых предположениях алгоритм оптимизации может быть разработан и для этого случая. Принимая во внимание, что в элементах тонкостенной конструкции напряжения по их толщине принимаются постоянными, проектные параметры  $h$ ,  $\{f\}$ ,  $\{t\}$  можно представить в виде двух слоев с одинаковыми значениями удельной энергии изменения формы:

$$h = (h - h_0) + h_0, \quad \{f\} = \{f - f_0\} + \{f_0\} \quad (10)$$

$$\{t\} = \{t - t_0\} + \{t_0\},$$

где  $(h - h_0)$ ,  $\{f - f_0\}$ ,  $\{t - t_0\}$  - слой, где величины проектных параметров  $h$ ,  $\{f\}$ ,  $\{t\}$  превышают значения конструктивных ограничений;  $h_0$ ,  $\{f_0\}$ ,  $\{t_0\}$  - конструктивный слой.

Вследствие (10) эквивалентные усилия  $N_H$ ,  $\{N_F\}$ ,  $\{N_T\}$ , возникающие в элементах  $H$ ,  $F$ ,  $T$ , могут быть представлены в виде

$$N_H = \sqrt{\alpha_{H\Phi}} U_{H\Phi} (h - h_0) + \sqrt{\alpha_{H\Phi}} U_{H\Phi} h_0, \quad \{N_F\} = \{\sqrt{\alpha_{F\Phi}} U_{F\Phi} (f - f_0)\} + \{\sqrt{\alpha_{F\Phi}} U_{F\Phi} f\}$$

$$\{N_T\} = \{\sqrt{\alpha_{T\Phi}} U_{T\Phi} (t - t_0)\} + \{\sqrt{\alpha_{T\Phi}} U_{T\Phi} t_0\} \quad (11)$$

Энергия изменения формы всей конструкции может быть разбита на 2 части:

$$U_\Phi = U_{1\Phi} + U_{0\Phi} \quad (12)$$

где  $U_{0\Phi}$  - энергия формоизменения конструктивного слоя. На основании (1) и (10) имеем

$$U_{1\Phi} = \int_{S-S_0} (h - h_0) v_{H\Phi} ds + \sum_{k=1}^n \int_{l_k - l_{k_0}} (f_k - f_{k_0}) v_{Fk\Phi} dz_k + \sum_{e=1}^m \int_{S_e - S_{e_0}} (t_e - t_{e_0}) v_{Te\Phi} ds_e$$

$$U_{0\Phi} = \int_S h_0 v_{H\Phi} ds + \sum_{k=1}^n \int_{l_k} f_{k_0} v_{Fk\Phi} dz_k + \sum_{e=1}^m \int_{S_e} t_{e_0} v_{Te\Phi} ds_e$$

Требования прочности (7) в виде равенств должны выполняться для элементов  $H$ ,  $F$ ,  $T$  в областях  $(S - S_0)$ ,  $(l_k - l_{k_0})$ ,  $(S_e - S_{e_0})$  и имеют вид

$$\varphi_H = \frac{\bar{N}_H}{(h-h_0)} - \bar{K}_H \frac{\bar{N}_{HФ}}{(h_{ФФ}-h_0)} = 0, \quad \{\varphi_F\} = \left\{ \frac{\bar{N}_F}{(f-f_0)} - \bar{K}_F \frac{N_{HФ}}{(h_{ФФ}-h_0)} \right\} = \{0\},$$

$$\{\varphi_T\} = \left\{ \frac{\bar{N}_T}{(t-t_0)} - \bar{K}_T \frac{N_{HФ}}{(h_{ФФ}-h_0)} \right\} = \{0\}, \quad (I3)$$

где:

$$\bar{N}_H = \sqrt{\alpha_H v_{HФ}} (h-h_0), \quad \bar{N}_{HФ} = \sqrt{\alpha_{HФ} v_{HФ}} (h_{ФФ}-h_0), \quad \{\bar{N}_F\} = \left\{ \sqrt{\alpha_F v_{FФ}} (f-f_0) \right\}$$

$$\{\bar{N}_T\} = \left\{ \sqrt{\alpha_T v_{TФ}} (t-t_0) \right\} - \text{эквивалентные усилия в первом слое,}$$

$$\bar{K}_H = \sqrt{\frac{K_H \alpha_H}{\alpha_{HФ}}}, \quad \{\bar{K}_F\} = \left\{ \sqrt{\frac{K_F \alpha_F}{\alpha_{HФ}}} \right\}, \quad \{\bar{K}_T\} = \left\{ \sqrt{\frac{K_T \alpha_T}{\alpha_{HФ}}} \right\}.$$

Для определения значений проектных параметров  $h$ ,  $\{f\}$ ,  $\{t\}$ , минимизирующих функционал (I), рассмотрим функционал Лагранжа

$$L = v_0 + v_0 \lambda \varphi + \int_{S-S_0} \lambda_H \varphi_H ds + \sum_{k=1}^K \int_{\ell_k-\ell_{k0}} \lambda_{FK} \varphi_{FK} dz_k + \sum_{e=1}^E \int_{S_e-S_{e0}} \lambda_{TE} \varphi_{TE} ds_e \quad (I4)$$

в предположении независимости усилий (II) от распределения проектных параметров в первом слое элементов  $H$ ,  $F$ ,  $T$ .

Записывая условия минимума функционала (I4) по параметрам  $h$ ,  $\{f\}$ ,  $\{t\}$ ,  $h_{ФФ}$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_H$ ,  $\{\lambda_F\}$ ,  $\{\lambda_T\}$  с учетом ограничений (I3), можно прийти к следующим расчетным формулам для определения проектных параметров  $h$ ,  $\{f\}$ ,  $\{t\}$  в итерационном процессе:

$$h^{(n)} = [h^{(n-1)} - h_0] \sqrt{\frac{U_{HФ}^{(n-1)}}{K_H \lambda^{(n-1)}}} + h_0, \quad \{f^{(n)}\} = \left\{ (f^{(n-1)} - f_0) \sqrt{\frac{U_{FФ}^{(n-1)}}{K_F \lambda^{(n-1)}}} + f_0 \right\},$$

$$\{t^{(n)}\} = \left\{ (t^{(n-1)} - t_0) \sqrt{\frac{U_{TФ}^{(n-1)}}{K_T \lambda^{(n-1)}}} + t_0 \right\},$$

$$\sqrt{\lambda^{(n-1)}} = \frac{\int_{S-S_0} (h^{(n-1)} - h_0) \sqrt{\frac{U_{HФ}^{(n-1)}}{K_H}} ds + \sum_{k=1}^K \int_{\ell_k-\ell_{k0}} (f_k^{(n-1)} - f_{k0}) \sqrt{\frac{U_{FKФ}^{(n-1)}}{K_{FK}}} dz_k + \sum_{e=1}^E \int_{S_e-S_{e0}} (t_e^{(n-1)} - t_{e0}) \sqrt{\frac{U_{TE}^{(n-1)}}{K_{TE}}} ds_e}{V_0 - \left( \int_S h_0 ds + \sum_{k=1}^K \int_{\ell_k} f_{k0} dz_k + \sum_{e=1}^E \int_{S_e} t_{e0} ds_e \right)} \quad (I5)$$

Следует отметить, что вычисление изопараметрической константы  $\lambda$  в итерационном процессе может вестись интегрированием по областям  $S$ ,  $\{\ell\}$ ,  $\{S\}$ , так как в подынтегральных выражениях слагаемые  $(h^{(n-1)} - h_0)$ ,  $\{f_k^{(n-1)} - f_{k0}\}$ ,  $\{t_e^{(n-1)} - t_{e0}\}$  автоматически отслеживают области конструктивных ограничений  $S_0$ ,  $\{\ell_0\}$ ,  $\{S_0\}$ .

Для того чтобы получить оптимальное распределение проектных параметров  $h$ ,  $\{f\}$ ,  $\{t\}$  в элементах силовой конструкции, удовлетворяющее требованиям прочности при предельном значении удельной энергии изменения формы  $\lambda_{\phi}$ , необходимо полученные оптимальные значения  $h$ ,  $\{f\}$ ,  $\{t\}$  по формулам (15) изменить на величину отношения  $\sqrt{\lambda_{\phi}^{\text{опт}}}$  в области, где они превышают значения конструктивных ограничений  $h_0$ ,  $\{f_0\}$ ,  $\{t_0\}$ , и для нового значения объема материала  $V_0$  возобновить итерационный процесс по формулам (15). Данный итерационный процесс может быть окончен, если в элементах силовой конструкции получено распределение проектных параметров со значением удельной энергии изменения формы в некоторой точке элемента  $H$ , равным предельному значению  $\lambda_{\phi}$ , определяемому требованиями прочности.

Так как энергия деформации равна

$$U = U_{\phi} + U_V,$$

где  $U_V$  — энергия изменения объема, то уменьшение лишь энергии формоизменения  $U_{\phi}$  при фиксированном значении энергии изменения объема  $U_V$  на каждом шаге итерационного процесса приводит также и к уменьшению энергии деформации  $U$ , которая в пределе достигает минимального значения. Кроме того, принимая во внимание, что удельная энергия изменения формы по определению всегда меньше удельной энергии деформации.

$$U_{H\phi} < U_H, \quad \{U_{F\phi}\} < \{U_F\}, \quad \{U_{T\phi}\} < \{U_T\},$$

в результате оптимизации силовой конструкции в соответствии с формулами (15) получим оптимальное распределение проектных параметров  $h$ ,  $\{f\}$ ,  $\{t\}$ , удовлетворяющее требованиям прочности (2) при предельном значении удельной энергии изменения формы  $\lambda_{\phi}$ , соответствующее пластическому состоянию конструкционного материала элементов  $H$ ,  $F$ ,  $T$  в области, где значения параметров  $h$ ,  $\{f\}$ ,  $\{t\}$  превышают значения конструктивных ограничений  $h_0$ ,  $\{f_0\}$ ,  $\{t_0\}$ .

В качестве примеров, на которых апробировался метод минимизации функционала энергии формоизменения, рассматривались кессонные конструкции, показанные на рис. 1 и 2. Идеализированная конструкция в соответствии с предположениями метода конечных элементов состояла из поясов ( $F$ ), работающих на растяжение-сжатие; обшивки ( $H$ ), работающей на растяжение-сжатие и сдвиг; стенок ( $T$ ), работающих на сдвиг.

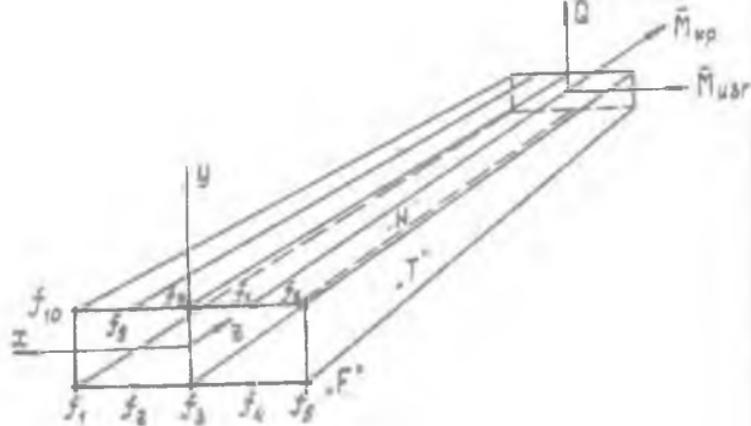


Рис. 1

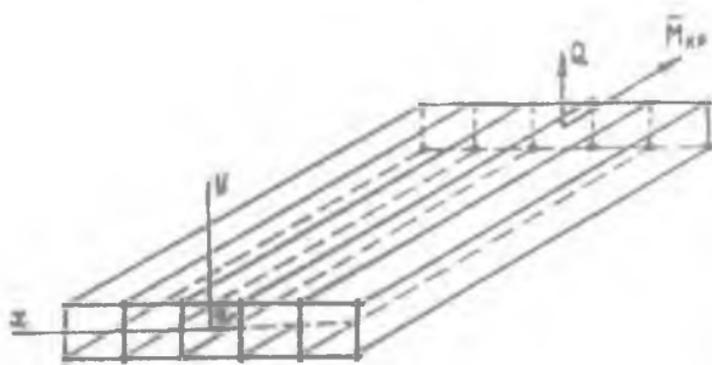


Рис. 2

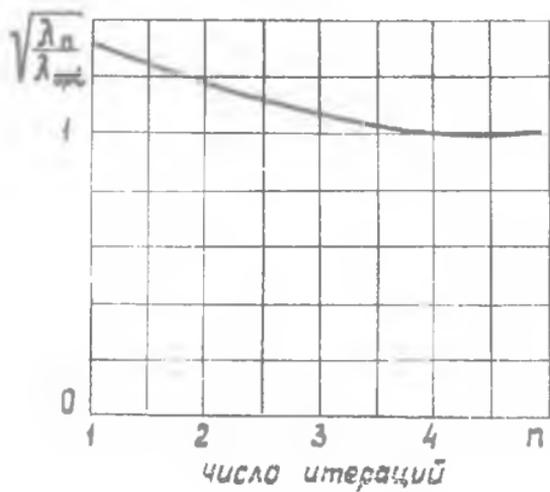


Рис. 3

В расчете принималось

$$\lambda_{\text{н}} = \frac{(1 - \mu_{\text{н}})}{3E_{\text{н}}} (6\sigma_z^2 + \sigma_x^2 - 6\sigma_x\sigma_z + 3\tau_{xz}^2) = \frac{(1 + \mu_{\text{н}})}{3E_{\text{н}}} \sigma_T^2,$$

$$4 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2, \quad \mu_{\text{н}} = 1, \quad \{K_F\} = \{1\}, \quad \{K_T\} = \left\{\frac{4}{3}\right\}, \quad (\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_T}{2}),$$

$$\mu_{\text{н}} = \mu_F = \mu_T = \mu, \quad E_{\text{н}} = E_F = E_T = 0,72 \cdot 10^6 \text{ [кг/см}^2\text{]}.$$

На рис. 3 представлена зависимость параметра  $\sqrt{\lambda}$  от числа итераций при оптимизации кессона (рис. 1). Кессон имел жесткое закрепление по контуру при  $z = 0$  и в концевом сечении был нагружен перерезывающей силой, крутящим и изгибающим моментами. Итерационный процесс минимизации функционала (I) по формулам (I5) в данном случае сходился за 4 итерации при невязке целевой функции 0,1%. Оптимальное распределение толщины обшивки и площадей поперечных силовых элементов по размаху и хорде показано на рис. 4 и 5. В результате оптимизации крутильная жесткость кессона, оцениваемая по углам закручивания поперечного сечения, увеличилась на 37%.

Кессон, изображенный на рис. 2, имел также по контуру  $z = 0$  жесткое закрепление, а в концевом сечении был нагружен перерезывающей силой и крутящим моментом. Для него решалась задача оптимизации по формулам (I5) при наличии конструктивных ограничений -  $h_0 = 0,12 \text{ см}$ ,  $\{f_0\} = \{0,4 \text{ см}^2\}$ ,  $\{t_0\} = \{0,1 \text{ см}\}$ . На рис. 6 представлено изменение параметра  $\sqrt{\lambda}$ , объема материала обшивки ( $V_{\text{н}}$ ), объема материала поясов ( $V_F$ ) и объема материала стенок ( $V_T$ ) в итерационном процессе минимизации энергии формоизменения. На рис. 7 показано изменение области конструктивных ограничений в итерационном процессе, оптимальное распределение толщины обшивки  $h$ , площади пояса силового элемента и соответствующие им распределения эквивалентных напряжений в обшивке и нормальных напряжений в поясе.

Анализируя эти зависимости, можно отметить, что в итерационном процессе минимизации функционала (I) происходит перераспределение объема материала  $V_0$  (рис. 6) между элементами  $\text{н}$ ,  $F$ ,  $T$ . При этом происходит выравнивание удельной энергии изменения формы в области, где значения проектных параметров превышают значения конструктивных ограничений (рис. 7). Кроме того,

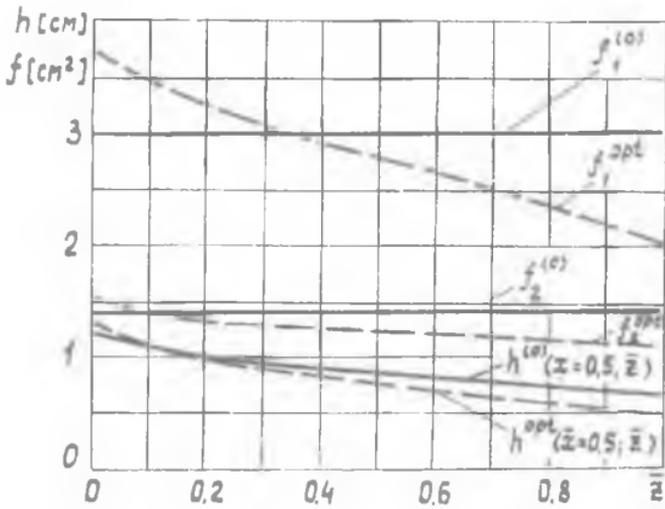


Рис. 4

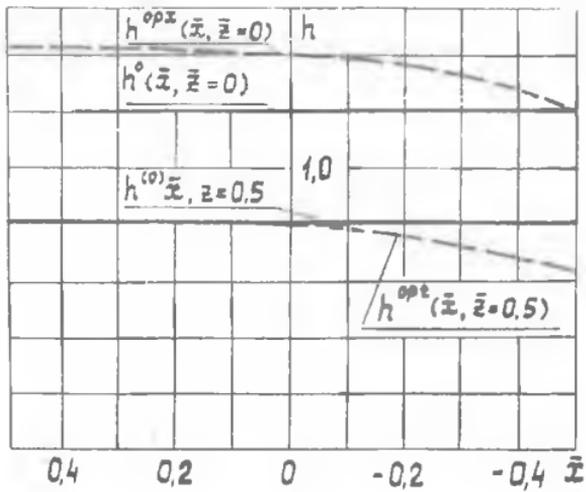


Рис. 5

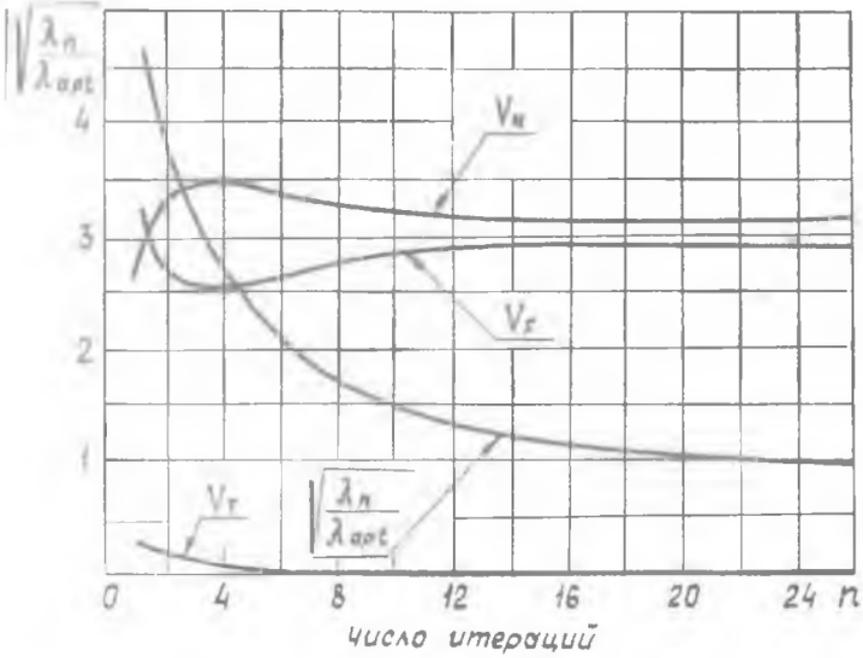


Рис. 6

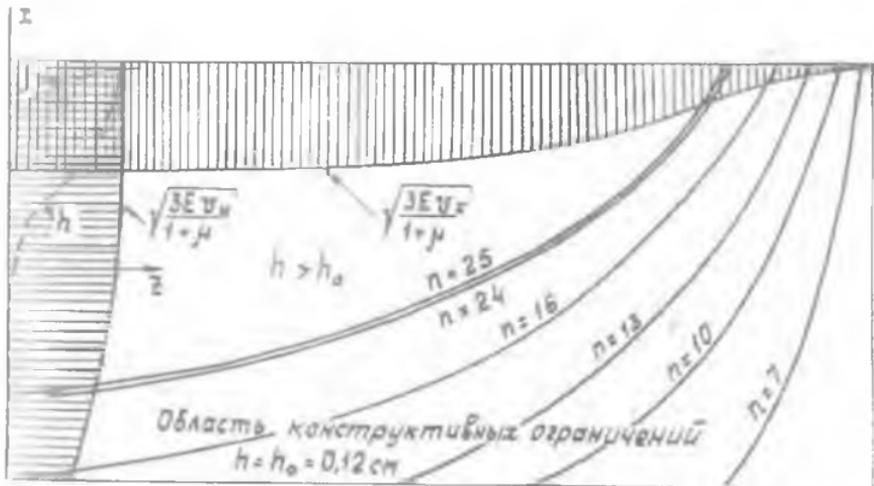


Рис. 7

следует отметить, что в тех случаях, когда в итерационном процессе область конструктивных ограничений последовательно увеличивается от итерации к итерации, энергия формоизменения достигает своего минимального значения за большое число итераций.

### Л и т е р а т у р а

1. Wasilutynski Z., *On the congruency of the formung according to the minimum potential energy with according to the equal Steinhilber. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci., tech., V. VIII. № 6. 1960.*
2. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов, М., "Машиностроение", 1968.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., "Мир" 1975.
4. Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ, том. 2, Л., "Судостроение", 1974.
5. Липин Е.К. Проектирование силовых конструкций максимальной жесткости. Ученые записки ЦАГИ, т. 6, № 4, 1975.
6. Липин Е.К. Об учете конструктивных и технологических ограничений при проектировании силовых конструкций максимальной жесткости. Ученые записки ЦАГИ, т. 7, № 2, 1976. -