ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 4, 1978

УДК (539.3:518.5)001.5

С.М.Сквиренко

ОДИН ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТОНКИХ УПРУГИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В практике решения статических задач теории упругости в последнее время появилось новое направление, связанное с привлечением прямых методов теории экстремальных задач в ставшую уже традиционной процедуру энергетического подхода. При этом исходная вариационная задача об экстремуме некоторого функционала, решаемая численно, не сводится к системе алгебраических уравнений, а формулируется как задача математического программирования. Для решения последней применяются в основном два метода: локальных вариаций и сопряженных градиентов. Причем эти методы могут успешно работать не только в случае минимизации положительно определенных квадратичных форм (унимодальные вариационные задачи линейной теории упругости), но и в более сложных случаях (задачи устойчивости, геометрически и физически нелинейные задачи).

В настоящей статье представлены некоторые результаты исследований по применению метода сопряженных градиентов (МСГ) в форме Флетчера-Ривса [1] для решения геометрически нелинейных задач теории тонких оболочек.

Функционал потенциальной энергии деформации тонкой оболочки записывается так [2]:

$$\Pi = \iint\limits_S \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \Big\{ (\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)^2 - 2(1-\nu)\Big(\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \frac{\omega_{\alpha\beta}^2}{4}\Big) + \frac{h^2}{12}\Big[(\chi_\alpha + \chi_\beta)^2 - 2(1-\nu)(\chi_\alpha \chi_\beta + \tau_{\alpha\beta}^2)\Big]\Big\} AB\, d\alpha\, d\beta. \qquad (1)$$

Связь между перемещениями u , v , w и деформациями принимается в нелинейной форме, т.е. учитываются дополнительно члены второго порядка малости для компонентов деформации ε_α , ε_β , $\omega_{\alpha\beta}$. В частности, для рассмотренной в качестве примера цилиндрической оболочки

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2, \qquad \varepsilon_\beta = \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)^2,$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta}. \tag{2}$$

Компоненты χ_α , χ_β и $\tau_{\alpha\beta}$, описывающие деформации изгиба и кручения, вычисляются так же, как и для линейно упругой оболочки:

$$\chi_\alpha = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \qquad \chi_\beta = -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{w}{R^2},$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{R\partial \beta} - \frac{\partial v}{R\partial \alpha} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}\right). \tag{3}$$

Порядок расчета напряженно-деформированного состояния тонкостенной конструкции следующий. Исследуемая область оболочки покрывается конечно-разностной сеткой, в узлах которой фиксируются искомые перемещения u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} . Производные, входящие в выражение функционала полной потенциальной энергии системы "оболочка-нагрузка", заменяются с помощью разностных отношений, а интегрирование по области заменяется суммированием при помощи осреднения подынтегральных выражений на каждой ячейке сетки. Таким образом, получается функция многих переменных, представляющая собой алгебраическую сумму линейной, квадратичной, третьего и четвертого порядка форм относительно искомых переменных u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} . Задача отыскания условного экстремума дискретного аналога функционала полной энергии (искомый вектор должен принадлежать множеству кинематически возможных смещений) решается с помощью МСГ, причем минимизация по направлению сопряженного вектора организуется с помощью процедуры Фибоначчи [3]. При необходимости по результирующему вектору перемещений легко могут быть найдены напряжения в узлах аппроксимации. Отметим, что численная реализация такого подхода на ЭВМ требует хранить на рабочем поле вычислительной машины всего три вектора, при этом внешняя память вообще не используется. Методику расчета проиллюстрируем на примере круговой цилиндрической оболочки с прямоугольными вырезами на боковой поверхности (рис. I), нагруженной по торцу равномерно распределенным сжимающим нагружением σ . Результаты расчета для различного числа неизвестных сравниваются с данными Ф.Броугена и Б.Олмроса [4], которые при решении данной задачи использовали вариационно-разностный метод. Решение нелинейной (третьей степени) системы, включающей в себя около 600 алгебраических уравнений, указанные авторы проводили модифицированным методом Ньютона-Рафсона.

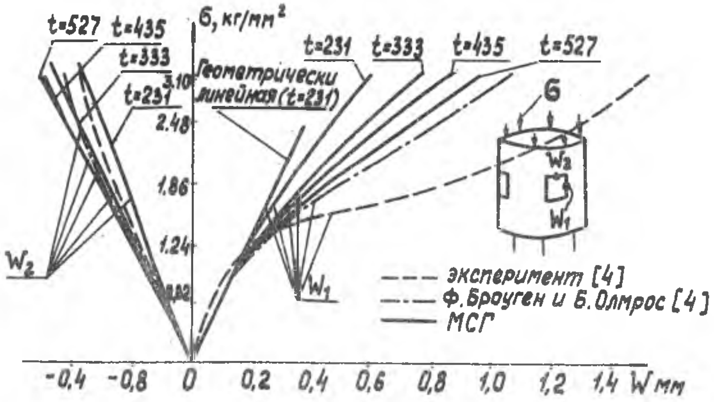

Рис. I

На рис. I приведены графики характерных радиальных перемещений в двух точках на контуре выреза для различного числа неизвестных t . Отметим, что с увеличением размерности задачи уменьшается разница между нашим решением и результатами Ф.Броугена и Б.Олмроса. Несовпадение данных расчета при максимальной размерности (t = 527) может быть объяснено отличиями в разностных схемах, принятых в обоих расчетах.

Литература

1. Fletcher R., Reeves C.M. Function minimization by conjugate gradients, „The Computer Journal," v.7, 1964, n.2, 149-154.
2. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек, Л., Судпромгиз, 1951.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование, М, "Наука," 1975.
4. Броуген Ф., Олмрос Б. "Ракетная техника и космонавтика", 1970, №2