

УДК 629.02:539.4

Э.И. Миноранский, Ю.Л. Тарасов

ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ
ПРИ ТРАНСПОРТИРОВКЕ

В данной статье рассматривается методика оценки надежности конструкции при транспортировке. Для расчета используется теория надежности В.В. Болотина [1], согласно которой общая схема расчета состоит из четырех этапов: схематизация системы и внешнего воздействия, решение задачи статистической динамики, выбор области допустимых состояний Ω_0 , определении функции надежности $H(t)$ как вероятности пребывания элемента системы $v(t)$ в Ω_0 в течение заданного времени:

$$H(t) = P[v(\tau) \in \Omega_0, 0 \leq \tau \leq t].$$

Конструкцию схематизируем в виде тонкостенной балки переменного сечения и рассматриваем плоское колебательное движение автопоезда. Обоснованность исследования колебаний в вертикальной плоскости и выделение главных факторов при построении расчетной схемы колебательной системы (рис. 1), эквивалентной реальной, приведены в работе [2].

Перемещения объектов системы отсчитываем от положения статического равновесия и характеризуем смещениями y_1, y_2, y_3, y_c с малыми углами поворота φ и θ и функцией перемещения упругого тела $u(x, t)$. Точка C относительно механической системы неподвижна и совпадает в положении статического равновесия с центром инерции системы "упругое тело-платформа". Упругие перемещения представим в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^4 \psi_n(x) \xi_n(t),$$

где $v_n^j(x)$ - собственные формы колебаний, $\xi_n(t)$ - искомая функция времени.

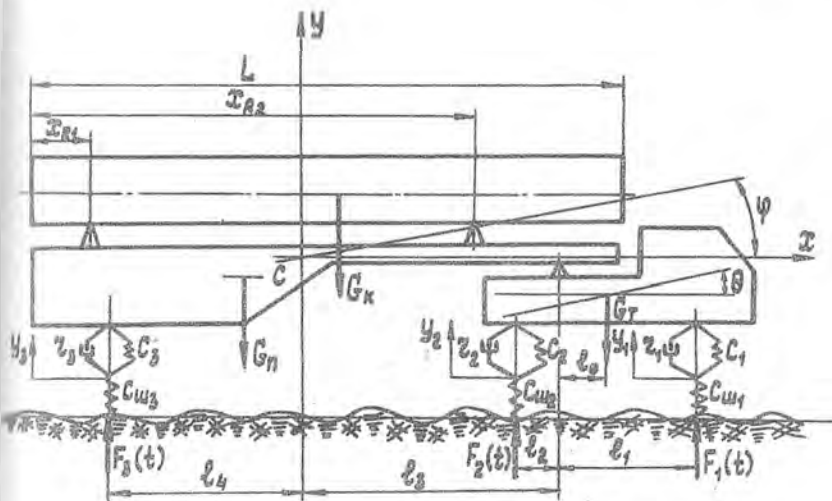


Рис. I

Закон изменения жесткости рессор аппроксимирован кубической параболой $C_i = \gamma^i y_i$.

Неровность дороги представляет собой стационарный нормальный случайный процесс $F(t)$ со спектральной плотностью $S_F(\omega)$.

Перемещения конструкции в системе координат $УСХ$ можно представить зависимостью

$$y = y_c + (x - x_c)\varphi + \sum_{n=1}^4 v_n^j \xi_n. \quad (1)$$

Записав выражение для кинетической, потенциальной энергии и диссипативной функции [2] и воспользовавшись уравнением Лагранжа второго рода, получим систему из семи дифференциальных уравнений, которую запишем в матричном виде:

$$A\ddot{y} + B\dot{y} + Cy = DX. \quad (2)$$

Здесь $A = [a_{ij}]$ - матрица коэффициентов инерции; $C = [c_{ij}]$ - матрица элементов жесткости; $B = [b_{ij}]$ - матрица коэффициентов демпфирования; $D = [d_{ij}]$ - матрица, характеризующая внешнее воз-

действие; $X = [x_i]$ - матрица-столбец возмущения; Y, \dot{Y}, \ddot{Y} - матрицы-столбцы обобщенных координат, скоростей и ускорений;

$$Y = \{Y_1, Y_2, Y_3, Y_c, \varphi, \theta, U_n\}.$$

Система (2) - нелинейная, для решения ее воспользуемся методом статистической линеаризации [3]. Нелинейные зависимости $\varphi_1 = [Y_2 - (Y_c + \ell_3 \varphi) + \ell_2 \theta]^3$ и $\varphi_2 = [Y_3 - (Y_c - \ell_4 \varphi)]^3$ аппроксимируем линеаризованными и коэффициенты линеаризации K_{Y_i} ($Y_i = Y_2, Y_3, Y_c, Y_\varphi = Y_\theta$) определяем из условия минимума дисперсии ошибки.

Учитывая, что случайные функции Y_i независимые, воспользуемся преобразованиями [3] и получим

$$K_{Y_2} = K_{Y_c} = K_\varphi = K_\theta = K_a$$

$$K_{Y_3} = K'_{Y_c} = K'_\varphi = K_B$$

$$K_a = 3(D_{Y_2} + D_{Y_c} + \ell_3^2 D_\varphi + \ell_2^2 D_\theta)$$

$$K_B = 3(D_{Y_3} + D_{Y_c} + \ell_4^2 D_\varphi).$$

С учетом (2) запишем ненулевые элементы матриц

$$a_{ii} = m_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad a_{44} = m_n + m_\tau + m_k;$$

$$a_{66} = J_\tau + m_\tau \ell_0^2; \quad a_{35} = J_n + m_\tau \ell_3^2 + \int_0^{\ell} m(x)(x - x_c) dx;$$

$$a_{77} = \int_0^{\ell} m(x) \psi_n^2(x) dx; \quad a_{46} = m_\tau \ell_0;$$

$$a_{45} = m_\tau \ell_3 + \int_0^{\ell} m(x)(x - x_c) dx; \quad a_{56} = m_\tau \ell_3 \ell_0;$$

$$a_{47} = \int_0^{\ell} m(x) \psi_n(x) dx; \quad a_{57} = \int_0^{\ell} m(x)(x - x_c) \psi_n(x) dx;$$

$$c_{11} = c_1 + c_{w1}; \quad c_{22} = c_{w2} + c_2 \bar{K}_a;$$

$$c_{33} = c_3 \bar{K}_B + c_{w3}; \quad c_{15} = -c_1 \ell_3; \quad c_{14} = -\ell_1;$$

$$C_{16} = -l_1 c_1; \quad C_{24} = -C_2 \bar{K}_a; \quad C_{25} = -C_2 l_3 \bar{K}_a;$$

$$C_{26} = C_2 l_2 \bar{K}_a; \quad C_{34} = -C_3 \bar{K}_B; \quad C_{35} = C_3 l_4 \bar{K}_a;$$

$$C_{44} = C_1 + C_2 \bar{K}_a + C_3 \bar{K}_B; \quad C_{45} = C_1 l_3 + C_2 l_2 \bar{K}_a - C_3 l_4 \bar{K}_B;$$

$$C_{46} = C_1 l_1 - C_2 l_2 \bar{K}_a; \quad C_{66} = C_1 l_1^2 + C_2 l_2^2 \bar{K}_a;$$

$$C_{55} = C_1 l_3^2 + C_2 l_3^2 \bar{K}_a + C_3 l_4^2 \bar{K}_B; \quad C_{77} = \int_0^l EY(x) [v_n''(x)]^2 dx;$$

$$C_{56} = C_1 l_1 l_3 + C_2 l_2 l_3 \bar{K}_a; \quad \bar{K}_a = 1 + K_a;$$

$$\bar{K}_B = 1 + K_B.$$

Элементы b_{ij} получаются из элементов C_{ij} , положив $y = 0$, C_i заменив на \bar{C}_i :

$$d_{ii} = C_{\omega_i} \quad (i=1,2,3); \quad d_{ii} = 0 \quad (i > 3); \quad d_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$x_1 = F_1(t); \quad x_2 = F_2\left(t - \frac{l_1 + l_2}{v}\right);$$

$$x_3 = F_3\left(t - \frac{l_1 + l_2 + l_3}{v}\right).$$

$x_i = 0 \quad (i > 3)$, где v - скорость движения.

Полученная линеаризованная система решается спектральным методом [1]

$$S_y(\omega) = |W_y(i\omega)|^2 S_F(\omega),$$

где $S_y(\omega)$ - спектр выхода, $|W_y(\omega)|$ - амплитудно-частотная характеристика системы:

$$|W_y(i\omega)| = \sqrt{R_e^2 W_4(i\omega) + J_m^2 W_4(i\omega)}$$

После несложных преобразований выражения для действительной и мнимой части $W(i\omega)$ будут

$$\operatorname{Re} W(i\omega) = (I + \omega^2 B U^{-1} B)^{-1} (D \sin \tau \omega - \omega B U^{-1} D \sin \tau \omega)$$

$$Y_m W(i\omega) = (U + \omega^2 B U^{-1} B)^{-1} (-D \sin \tau \omega - U B U^{-1} D \cos \tau \omega).$$

Здесь $U = C - \omega^2 A$.

Как видно из (3), \bar{K}_a и \bar{K}_b зависят от неизвестных дисперсий. Фактически получаем систему алгебраических уравнений относительно D_{y_2} , D_{y_3} , Y_{yc} , D_φ , D_θ .

Для исследования была выбрана система, параметры которой приведены в таблице I.

Таблица I

| G_T кг | G_H кг | G_K кг | G_1 кг | G_2 кг | G_3 кг | C_{ω_1} кг/см | $C_{\omega_2} = C_{\omega_3}$ кг/см | γ 1/см |
|-------------|----------------|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------------------|--|---------------------------|
| 6350 | 6750 | 2100 | 1200 | 1250 | 1500 | 680 | 880 | 0,0061 |
| l м | l_{R_1} м | l_{R_2} м | l_2 м | l_1 м | l_2 м | l_3 м | l_4 м | $\nu_1 = \nu_2$ кг.о/м |
| 15 | 1,5 | 11,5 | 0,4 | 2,9 | 0,9 | 8,5 | 4,5 | 1,18 |

Спектральная плотность входного воздействия имеет вид

$$S_F(\omega) = D_F \frac{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{\omega^4 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2)},$$

где $\alpha = 0,11$ 1/с; $\beta = 0,14$ 1/с; $D_F = 482$ см².

Все расчеты проведены на ЭЕМ БЭСМ-6. В качестве нулевого приближения были взяты значения дисперсий для линейной системы, т.е. при $\gamma = 0$. В результате расчета получены все коэффициенты для передаточной функции системы.

В качестве реакции системы (рис. I) примем величину напряжения $\sigma(x, t)$ в различных сечениях конструкции, представляющего собой нормальный стационарный случайный процесс, который удобно представить в виде

$$\sigma(x, t) = \langle \sigma(x, t) \rangle + \tilde{\sigma}(x, t),$$

где

$$\langle \sigma(x, t) \rangle = m_\sigma - \text{математическое ожидание.}$$

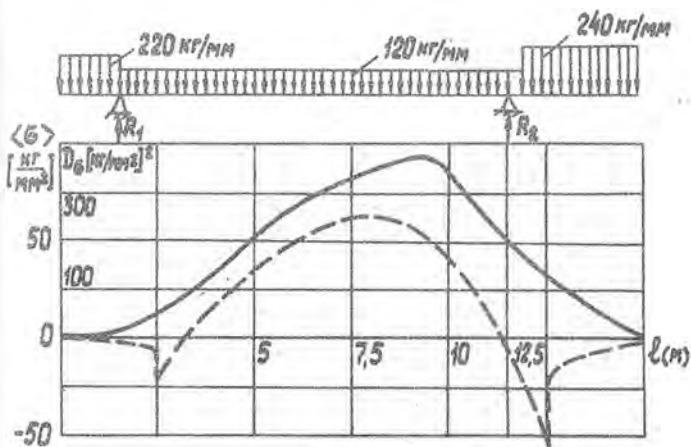


Рис. 2

Изгибающий момент $M(x, t)$ в сечении (рис. 2) определим по формуле

$$M(x, t) = \sum_{i=1}^2 R_i (x - x_{R_i}) \delta_{R_i} + \int_0^x dx \int_0^x m(x) \ddot{y} dx. \quad (4)$$

Здесь R_i - реакция опор ($i = 1, 2$), δ_{R_i} - единичная функция.

Дисперсия напряжения D_G определяется через спектральную плотность

$$D_G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_G(\omega) d\omega.$$

В свою очередь

$$S_G(\omega) = |W_G(i\omega)|^2 S_F(\omega).$$

Следуя [4] и выражениям (1), (4):

$$W_G(i\omega) = A_1 W_{\ddot{y}_c}(i\omega) + A_2 W_{\ddot{\varphi}}(i\omega) + A_3 W_{\ddot{u}}(i\omega),$$

Re $W_G(i\omega)$, $\Im W_G(i\omega)$ можно получить через действительные и мнимые части составляющих, которые получены для системы.

Так как амплитудно-частотная характеристика является быстро убывающей функцией частоты, то при вычислении $D_G(x)$ можно ограничиться достаточно низкими частотами. Значения $m_G(x)$ и $D_G(x)$ приведены на рис. 2.

Допустимые состояния конструкции находим из условия непревышения предельных напряжений в наиболее нагруженном сечении, т.е.

$$H(t) = P[\text{Sup } \sigma / \tau < \sigma_{np}] \quad (4)$$

$$0 \leq \tau \leq t$$

При этом рассматривается два вида отказов: нарушение прочности ($\sigma_{np} = \sigma_g$) и разрушение вследствие накопления усталостных повреждений в конструкции.

Согласно [1]

$$H(t) \approx 1 - \langle \nu(t) \rangle,$$

где $\langle \nu(t) \rangle = \int_0^t \langle \nu(\sigma_{np}, \tau) \rangle d\tau$ - математическое ожидание числа выбросов за σ_{np} в течение $[0, t]$. Так как закон распределения $\sigma(x, t)$ нормальный, то

$$H(t) = 1 - \frac{\omega_e t}{2\pi} \exp\left[-\frac{(\sigma_{np} - m_\sigma)^2}{2D_\sigma}\right], \quad (5)$$

$$\omega_e = \left[\frac{\int_0^\omega S_\sigma(\omega) \omega^2 d\omega}{\int_0^\omega S_\sigma(\omega) d\omega} \right]^{1/2}.$$

Предельное напряжение σ_{np} является тоже случайной величиной с законом распределений Вейбулла

$$f(\sigma_{np}) = \frac{\alpha}{U_{np}} \left(\frac{\sigma_{np} - \sigma_{np}^0}{U_{np}} \right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{\sigma_{np} - \sigma_{np}^0}{U_{np}} \right)^\alpha\right]. \quad (7)$$

Таким образом, функция надежности будет определяться через условную функцию надежности $H_0(t/\sigma_{np})$, которая подсчитывается по (6) при фиксированном σ_{np} .

Окончательное выражение запишется в виде [1]

$$H(t) = 1 - \frac{\omega_e t}{2\pi} e^{-\frac{\gamma \varepsilon}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\gamma^m \varepsilon^{m+2n}}{2^n m! n!} \Gamma\left(1 + \frac{m+2n}{\alpha}\right). \quad (8)$$

Здесь $\gamma = \frac{\sigma_{np} - m_\sigma}{\sqrt{D_\sigma}}$; $\varepsilon = \frac{U_{np}}{\sqrt{D_\sigma}}$; $\sigma_{np}^0 = 25 \text{ кг/мм}^2$
 $\alpha = 0,219$; $U_{np} = 8,55 \text{ кг/мм}^2$; $\Gamma(x)$ - полная гамма-функция.

Надежность при усталостном разрушении определялась в предположении линейного закона суммирования повреждений и распределения максимумов по закону Релея. С учетом случайного характера нагружения и узкополосности процесса оба предположения вполне допустимы. Тогда функция надежности в этом случае запишется в виде [1]:

$$H(t) = \exp\left\{ \left[\frac{\sqrt{2D_\sigma} \frac{m}{2\pi N_0} \frac{\omega_e t}{2\pi} \Gamma\left(\frac{\omega}{2} + 1\right) - \sigma_{-1,0}}{\sigma_{-1,0}} \right]^\alpha \right\}. \quad (9)$$

Исследования показали, что закон распределения $f(\sigma_{-1})$ имеет вид (7):

$$N_0 = 10^6, \quad \sigma_{np}^0 = 0, \quad \sigma_{np} = \sigma_{-1,0} = 4,85 \text{ кг/мм}^2, \\ u_{np}^\alpha = u_{-1}^\alpha = 0,45, \quad \alpha = 2.$$

Результаты расчета по формулам (8) и (9) приведены на рис.3.

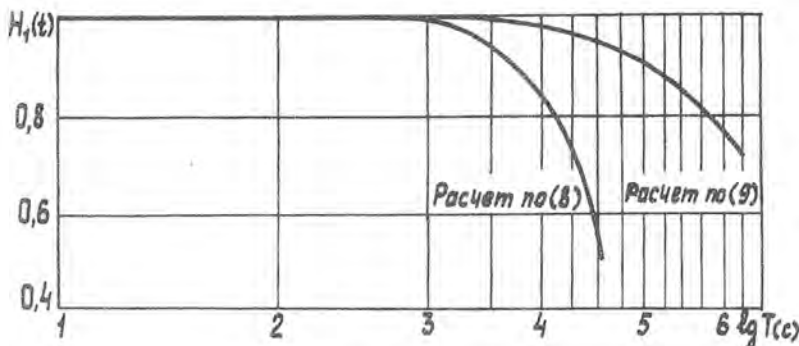


Рис. 3

Рассмотренная методика расчета надежности конструкции может быть применена и для других случаев нагружения.

Л и т е р а т у р а

1. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. - М.: Стройиздат, 1971. - 253 с.

2. Гриненко Н.И., Павлюк Ю.С. Динамический расчет систем с упруго-жидкостными звеньями при случайном воздействии. - Известия АН СССР, МТТ, 1969, № 6, с. 139-145.

3. Казаков И.Е. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. - М.: Физматгиз, 1962. - 332 с.

4. Сялаев А.А. Спектральная теория поддресоривания транспортных машин. - М.: Машгиз, 1963. - 191 с.