

ИД 624.074.4:539.1

И.И.Гриненко, С.В.Махнович

УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ
ПРИ ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Рассматривается устойчивость оболочек, локально нагруженных внешним давлением, распределенным на части боковой поверхности по заданному закону. Системы уравнений моментного докритического равновесия и устойчивости классической теории оболочек и в уточненной форме С.А.Амбарцумяна решаются методом Бубнова-Галеркина с представлением всех неизвестных в виде двойных тригонометрических рядов. В результате задача сводится к определению минимального собственного параметра бесконечной системы алгебраических уравнений. Для двух видов нагружения выполнен сравнительный анализ критических нагрузок, вычисляемых с учетом и без учета поперечных сдвигов.

Для исследования влияния деформаций поперечного сдвига на устойчивость оболочек при локальном нагружении воспользуемся уравнениями моментной теории /1/ в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} L_1(w) - \frac{h^2}{10R^2} [a_{55} \nabla_1^2(\chi_1) + a_{44} D \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \xi \partial \theta}] + \frac{h^3}{12} \chi_1 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L_2(w) - \frac{h^2}{10R^2} [a_{44} \nabla_2^2(\chi_2) + a_{55} D \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \xi \partial \theta}] + \frac{h^3}{12} \chi_2 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} L_1 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L_2 \right) w + \frac{h^2}{10R} [a_{55} \frac{\partial}{\partial \xi} L_1(\chi_1) + a_{44} \frac{\partial}{\partial \theta} L_2(\chi_2)] - (I)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{1}{R^2} L(w_0, F) - Q = 0,$$

$$\frac{1}{R_0} \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} + \left(\frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{S_{R_0}} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \theta^2} + \frac{C_{22}}{S_{R_0}} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + R \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + L(w_0, w) = 0.$$

ПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ. Кузнецов, 1990

Здесь приняты обозначения:

$$\nabla_1^2 = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad \nabla_2^2 = D_{22} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2},$$

$$L_1 = \nabla_1^2 + D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad L_2 = \nabla_2^2 + D \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}; \quad D = D_{12} + D_{66},$$

$a_{44} = \frac{1}{G_{23}}$; $a_{55} = \frac{1}{G_{13}}$ - коэффициенты сдвиговой податливости в поперечном направлении.

Остальные обозначения традиционны для теории оболочек и применительно к рассматриваемой задаче выписаны в работах /2,3/. Если положить функции поперечного сдвига χ_1 и χ_2 равными нулю, уравнения (I) приводятся к уравнениям устойчивости классической теории оболочек, на основе которых выполнены исследования в этих работах.

Уравнения, описывающие докритическое состояние равновесия оболочки, аналогичны линеаризованным уравнениям (I), если в них опустить нелинейные операторы $L(w_0, F)$ и $L(w_0, w)$, а Q принять равным действующей нагрузке Z . Для усилий и моментов в оболочке при этом справедливы соотношения

$$N_{11} = N_{11,K}; \quad N_{22} = N_{22,K}; \quad N_{12} = N_{12,K},$$

$$M_{11} = M_{11,K} + \frac{h^2}{10R} (D_{11} a_{55} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} + D_{12} a_{44} \frac{\partial \chi_2}{\partial \theta}),$$

$$M_{22} = M_{22,K} + \frac{h^2}{10R} (D_{22} a_{44} \frac{\partial \chi_2}{\partial \theta} + D_{12} a_{55} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi}),$$

$$M_{12} = M_{12,K} + \frac{h^2}{10R} D_{66} (a_{55} \frac{\partial \chi_1}{\partial \theta} + a_{44} \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi}),$$

$$Q_1 = \frac{h^3}{12} \chi_1, \quad Q_2 = \frac{h^3}{12} \chi_2.$$

Индексом "К" обозначены выражения для усилий и моментов классической теории оболочек, выписанные в /2/ и присутствующие здесь как слагаемые.

Для решения уравнений (I) при граничных условиях шарнирного опирания используем метод Бубнова-Галеркина, представляя неизвест-

ши в виде

$$\begin{Bmatrix} w \\ F \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} w_{i,j} \\ F_{i,j} \end{Bmatrix} \sin(\tau \xi) \cos(j \theta),$$

$$\chi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{1,i,j} \cos(\tau \xi) \cos(j \theta), \quad (2)$$

$$\chi_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{2,i,j} \sin(\tau \xi) \sin(j \theta),$$

где $\tau = \frac{i \pi R}{L}$, $i, j = 1, 2, 3, \dots$ - бифуркационные волновые числа.

Уравнения докритического равновесия оболочки решаем также в двойных тригонометрических рядах методом Фурье. Подставляя полученные выражения для докритических факторов, а также выражения (2) в уравнения (1), после интегрирования и исключения неизвестных $F_{i,j}$, $\chi_{1,i,j}$ и $\chi_{2,i,j}$ получим систему алгебраических уравнений, которая по виду ничем не отличается от полученной в работах /2,3/:

$$\begin{aligned} & A_{k,p} w_{k,p} + \sum_{i=1}^{\infty} w_{i,p} [\bar{Q} \beta_{i,p}^0 + \bar{Q}^2 (\gamma_{i,p}^0 + \gamma_{i,p}^-)] + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [w_{i,p+n} (\bar{Q} \beta_{i,p+n} + \bar{Q}^2 \gamma_{i,p+n}^+) + w_{i,p-n} (\bar{Q} \beta_{i,p-n}^- \\ & + \bar{Q}^2 \gamma_{i,p-n}^-) + w_{i,n-p} (\bar{Q} \beta_{i,n-p} + \bar{Q}^2 \gamma_{i,n-p}^+) + \bar{Q}^2 (w_{i,p+2n} \gamma_{i,p+2n}^- \\ & + w_{i,p-2n} \gamma_{i,p-2n}^- + w_{i,2n-p} \gamma_{i,2n-p}^+)] = 0 \quad (k, p = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь коэффициенты $\beta_{i,j}$ и $\gamma_{i,j}$ имеют такой же вид, как и в основной задаче без учета поперечных сдвигов /3/. Выражения для критических коэффициентов более громоздки. Выпишем их здесь для гладкой ортотропной оболочки, выражая коэффициенты жесткости через приращенные механические характеристики материала:

$$A_{k,p} = \frac{1}{c_1} \left[\frac{\mu g c_1}{\alpha} \frac{\bar{k}^4}{a_2(k,p)} + \frac{5}{6} \frac{g_5 S_3(\bar{k},p) + g_4 S_2(\bar{k},p)}{g S(k,p)} \right], \quad \bar{Q} = \frac{g \beta \mu}{\pi E_1},$$

$$f = f_1 \Big|_{n=0}, \quad f_1 = \frac{\mu g}{\alpha} \left[\frac{\bar{k}^2}{a_2(k,p)} + \frac{\bar{m}^2}{a_2(\bar{m},n)} + \frac{\tau^2}{a_2(\tau, p \pm n)} \right],$$

$$b_1 = \frac{1}{2\mu}, \quad b_2 = \frac{1}{4\mu}, \quad b_3 = b_5 = \frac{1}{8\mu^2}, \quad b_4 = b_6 = \frac{1}{16\mu^2}, \quad \bar{K} = \frac{K\pi R}{L},$$

$$S(\bar{K}, p) = (C_2 \bar{K} p)^2 - a_6(\bar{K}, p) a_7(\bar{K}, p), \quad C_1 = \alpha - \nu_2^2,$$

$$S_2(\bar{K}, p) = C_2 \bar{K}^2 p^2 a_4(\bar{K}, p) - p^2 a_5(\bar{K}, p) a_6(\bar{K}, p),$$

$$S_3(\bar{K}, p) = C_1 \bar{K}^2 p^2 a_5(\bar{K}, p) - \bar{K}^2 a_4(\bar{K}, p) a_7(\bar{K}, p),$$

$$a_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\alpha} x_1^4 + \left(\frac{1}{g} - 2\nu_1\right) x_1^2 x_2^2 + x_2^4$$

$$\text{при } (x_1, x_2) = (\bar{m}, n) \vee (\bar{K}, p) \vee (\tau, p \pm n),$$

$$a_4(\bar{K}, p) = \bar{K}^2 + p^2 (\nu_2 + 2\mu g), \quad a_5(\bar{K}, p) = \alpha p^2 + \bar{K}^2 (\nu_2 + 2\mu g),$$

$$a_6(\bar{K}, p) = \bar{K}^2 + \mu (p^2 g + 10\beta^2 g_5), \quad a_7(\bar{K}, p) = \alpha p^2 + \mu (\bar{K}^2 g + 10\beta^2 g_4),$$

$$f_{m,n} = \frac{\alpha}{\mu g} \frac{a_2(\bar{m}, n) S(\bar{m}, n)}{S_4(\bar{m}, n)}, \quad C_2 = \nu_2 + \mu g,$$

$$S_4(\bar{m}, n) = C_1 g \bar{m}^4 S(\bar{m}, n) - \frac{5}{6} \frac{\alpha}{\mu g} a_5(\bar{m}, n) [g_4 S_1(\bar{m}, n) + g_5 S_3(\bar{m}, n)],$$

$$\alpha = \frac{E_2}{E_1}, \quad g = \frac{G_{12}}{E_1}, \quad g_4 = \frac{G_{23}}{E_1}, \quad g_5 = \frac{G_{13}}{E_1}, \quad \beta = \frac{R}{h}, \quad \mu = 1 - \nu_1 \nu_2.$$

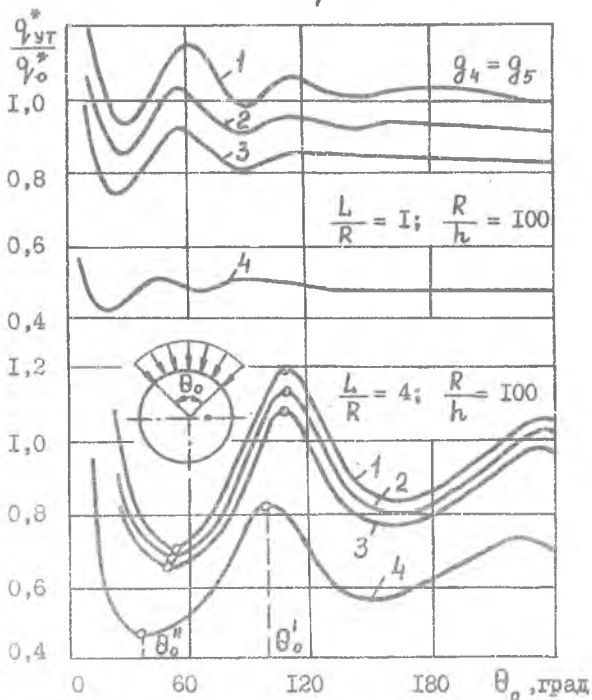
В этих выражениях E_1 , E_2 , G_{12} , G_{23} , G_{13} , ν_1 , ν_2 — соответствующие модули упругости и коэффициенты Пуассона ортотропного материала оболочки, q — параметр нагрузки z , изменение которой представлено в виде ряда Фурье:

$$z = q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z_{mn} \sin(\bar{m} \xi) \cos(n \theta).$$

Потере устойчивости докритического состояния равновесия оболочки соответствует минимальное значение параметра нагрузки q^* , при котором существует ненулевое решение $w_{ij} \neq 0$ системы однородных алгебраических уравнений (3). Условием существования такого решения является равенство нулю главного определителя этой системы.

Численные расчеты выполнены для композитных ортотропных оболочек.

ис с приведенными относительными характеристиками $\alpha = 2,08$, $\beta = 0,33$, $\gamma_1 = 0,214$, $\gamma_2 = 0,445$ при различных g_4 и g_5 . Рассмотрено два вида нагружения: локально-равномерное и косинусоидальное давление на части боковой поверхности оболочки, ограниченной центральным углом θ_0 . На рис. I для оболочек с различными геометрическими параметрами $\frac{L}{R}$ и $\frac{R}{h}$ показано влияние поперечной изгибной жесткости на изменение относительной критической нагрузки $\eta = \frac{q_{\text{уст}}^*}{q_0^*}$ в зависимости от углового размера площадки нагружения θ_0 (критическая локальная нагрузка с учетом поперечных сдвигов $q_{\text{уст}}^*$ отнесена к критическому давлению q_0^*).



1 - $g_4 = \infty$; 2 - $g_4 = 0,01$; 3 - $g_4 = 0,005$; 4 - $g_4 = 0,001$

Рис. I

Следует отметить, что здесь сохраняются все закономерности связи критических нагрузок при характерных углах θ'_0 и θ''_0 с докритическим деформированием поперечного сечения оболочки, выявленные в работах /2,3/. Однако, как можно заметить по графикам, эти значения углов θ'_0 и θ''_0 , при которых докритическое состояние оболочек наиболее существенно влияет на их устойчивость, уменьшаются при снижении относительного модуля поперечного сдвига $\frac{G_{13}}{E_1}$ и $\frac{G_{23}}{E_1}$.

Это связано прежде всего с уменьшением длины волны θ'_0 собственной формы изгиба поперечного сечения (при потере устойчивости под действием равномерного давления) у оболочек с пониженной сдвиговой жесткостью. Отмеченное обстоятельство является причиной и существенной разницы критических нагрузок $q_{\text{уг}}^*$ и q^* , рассчитанных соответственно с учетом и без учета поперечных сдвигов при ширине площадок нагружения $\theta_0 < \theta'_0$ (рис.2,3).

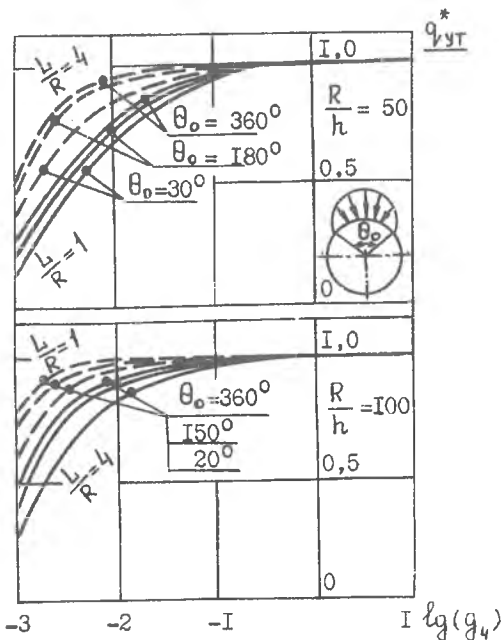


Рис. 2

С уменьшением относительных размеров оболочки $\frac{L}{R}$ и $\frac{R}{h}$ влияние пониженной поперечной сдвиговой жесткости оболочки на ее устойчивость возрастает. Например, для оболочек с $\frac{L}{R} = 1$ и $\frac{R}{h} = 50$ при $\theta_0 = 20^\circ$ и $g_4 = g_5 = 0,15$ погрешность от пренебрежения поперечными сдвиговыми деформациями в расчете критического параметра локальной равномерной нагрузки достигает 30 % в сторону ее завышения.

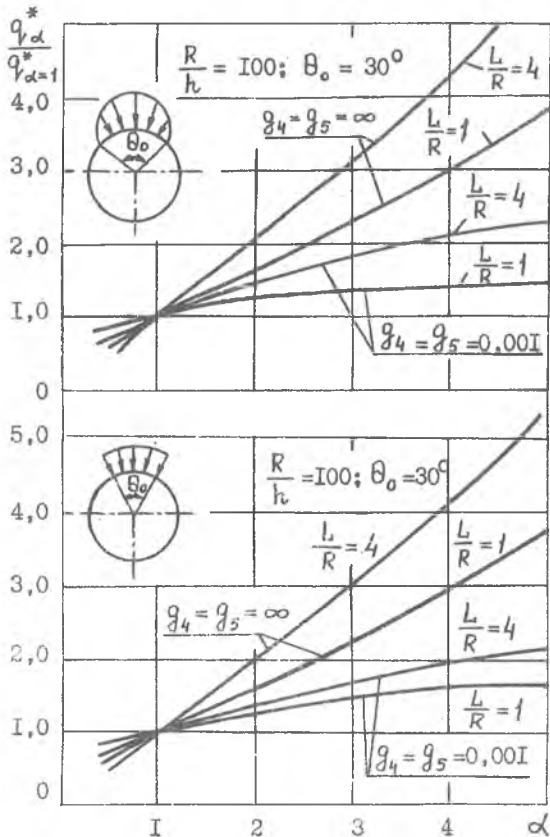


Рис. 3

На основании полученных результатов построены приближенные формулы для оперативной оценки влияния поперечной сдвиговой жесткости на устойчивость ортотропных оболочек при несимметричном боковом нагружении:

$$\frac{q_{\text{уст}}^*}{q^*} = 1 - \left[\frac{2(0,05 + \frac{h}{D})}{\frac{\sqrt{G_{13} G_{23}}}{E_1} \left(\frac{L}{R}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{R}{h}} + 3,3 \cdot 10^{-4} K_{\theta} \frac{(\lg \frac{E_1^2}{G_{13} G_{23}})^2}{\sqrt{\frac{L}{R}}} (K_n \theta_o^* - \theta_o) \right]$$

где θ_o - заданный угол приложения нагрузки; K_n - коэффициент, зависящий от характера нагрузки ($K_n = 0,54$ при косинусоидальном и $K_n = 0,8$ при локально-равномерном давлении; $K_{\theta} = 0$ при $\theta_o \geq K_n \theta_o^*$ и $K_{\theta} = 1$ при $\theta_o < K_n \theta_o^*$).

С учетом рекомендаций, полученных в работах [2,3], эти зависимости могут быть использованы при проектировании локально-нагруженных оболочек.

Библиографический список

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Махнович С.В., Печенин А.А. Устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек под действием локального давления // Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций: Межвуз. Куйбышев. авиац. ин-т. Куйбышев, 1986. С.129-136.
3. Махнович С.В., Ульянов О.Н. Устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки при локальном нагружении давлением, действующим на нескольких площадках боковой поверхности // Динамика и прочно-конструкции: Тематич. сб. научн. тр. Челяб. политехи. ин-т. Челябинск 1987. С.101-107.