Литература

1. Образцов И.Ф. Некоторые вопросы расчета на прочность тонкостенных конструкций самолета. - М.: Оборонгиз, 1957. - 176 с.

2. Образцов И.Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных пространственных конструкций. - М.: Машиностроение, 1966. - 392 с.

3. Образцов И.Ф., Онанов Г.Г. Строительная механика скошенных систем. М.: Машиностроение, 1973. - 659 с.

4. Коновалов Б.А. К расчету конических оболочек вариационным методом В.З.Власова. - В сб.: Прочность авиационных конструкций.- М: Оборонгиз, 1960, труды МАИ, вып. 130, с.19-56.

УДК 539.3:629.7.015.4

И.С.Ахмедьянов

О РАСЧЕТЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ЖЕСТКИМИ КРУГЛЫМИ ШАЙБАМИ

В работе /1/ изложена методика расчета сферической оболочки с жесткой круглой шайбой, смещенной на некоторое расстояние от полюса оболочки. В предлагаемой статье приводятся общие соотношения для исследования напряженно-деформированного состояния сферической оболочки с несколькими произвольно расположенными жесткими круглыми шайбами.

В основу работы положены зависимости, приведенные в /2,3/ (с сохранением принятых там основных обозначений).

1. Рассмотрим сферическую оболочку в виде сферического сегмента, ограниченного параллелью $\alpha = \alpha^{\circ}$ (рис.1; α, β - общая географическая система координат с полюсом в вершине оболочки). Пусть на нормалях к срединной поверхности оболочки, определяемых углами $\alpha = A_i$, $\beta = B_i$ (i = 1,2,..., S ; S - число шайб), расположены центры S жестких круглых шайб, к каждой из которых приложена заданная система сил и моментов. Кроме того, оболочка может подд-

вергаться воздействию равномерно распределенного внутреннего давления p.

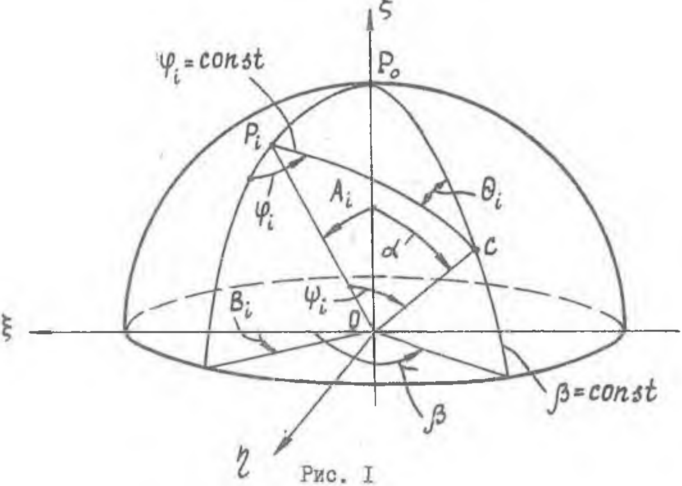

Рис. I

Для исследования напряженного и деформированного состояния оболочки введем в рассмотрение S местных географических систем координат ψ_i, φ_i ($i = 1,2,\ldots, S$) с полюсами в точках $\alpha = A_i$, $\beta = B_i$ срединной поверхности оболочки (рис.I).

Используя основные обозначения, принятые в /2,3/, можем записать согласно принципу суперпозиции:

$$N_1^{(0)} = \frac{pR}{2} + N_1^{00} + \sum_{i=1}^{S} N_1^{0i}, \qquad N_2^{(0)} = \frac{pR}{2} + N_2^{00} + \sum_{i=1}^{S} N_2^{0i},$$

$$S^{(0)} = S^{00} + \sum_{i=1}^{S} S^{0i}, \qquad Q_1^{(0)} = Q_1^{00} + \sum_{i=1}^{S} Q_1^{0i},$$

$$Q_2^{(0)} = Q_2^{00} + \sum_{i=1}^{S} Q_2^{0i}, \qquad M_1^{(0)} = M_1^{00} + \sum_{i=1}^{S} M_1^{0i},$$

$$M_2^{(0)} = M_2^{00} + \sum_{i=1}^{S} M_2^{0i}, \qquad H^{(0)} = H^{00} + \sum_{i=1}^{S} H^{0i}. \qquad \text{(I)}$$

Здесь $N_1^{(0)}, \ldots, H^{(0)}$ – усилия и моменты в общей системе координат (в сечениях $\alpha = const$, $\beta = const$), возникшие в закрепленной оболочке под действием внутреннего давления и нагрузок, приложенний по всем жестким шайбам; N_1^{oo} ,..., H^{oo} - усилия и моменты, вызванные реактивными краевыми самоуравновешенными нагрузками, действующими по нижнему краю оболочки $\alpha = \alpha^o$, и затухающие по мере удаления от этого края; N_1^{oi} ,..., H^{oi} - усилия и моменты, определяемые краевыми нагрузками, передаваемыми на оболочку со стороны i-ой шайбы:

$$N_1^{oi} = N_1^{ii}\cos^2\theta_i + N_2^{ii}\sin^2\theta_i - 2S^{ii}\sin\theta_i\cos\theta_i,$$

$$N_2^{oi} = N_1^{ii}\sin^2\theta_i + N_2^{ii}\cos^2\theta_i + 2S^{ii}\sin\theta_i\cos\theta_i,$$

$$S^{oi} = S^{ii}(\cos^2\theta_i - \sin^2\theta_i) + (N_1^{ii} - N_2^{ii})\sin\theta_i\cos\theta_i,$$

$$Q_1^{oi} = Q_1^{ii}\cos\theta_i - Q_2^{ii}\sin\theta_i, \quad Q_2^{oi} = Q_1^{ii}\sin\theta_i + Q_2^{ii}\cos\theta_i,$$

$$M_1^{oi} = M_1^{ii}\cos^2\theta_i + M_2^{ii}\sin^2\theta_i - 2H^{ii}\sin\theta_i\cos\theta_i,$$

$$M_2^{oi} = M_1^{ii}\sin^2\theta_i + M_2^{ii}\cos^2\theta_i + 2H^{ii}\sin\theta_i\cos\theta_i,$$

$$H^{oi} = H^{ii}(\cos^2\theta_i - \sin^2\theta_i) + (M_1^{ii} - M_2^{ii})\sin\theta_i\cos\theta_i. \qquad (2)$$

В этих формулах: N_1^{ii} ,..., H^{ii} - усилия и моменты в i-ой системе координат (в сечениях $\psi_i = const$, $\varphi_i = const$), возникшие от нагрузок, приложенных к i-ой шайбе; θ_i - угол, под которым в рассматриваемой точке срединной поверхности оболочки пересекаются меридианы $\beta = const$ и $\varphi_i = const$ (рис.I).

2. Для усилий и моментов N_1^{oo} ,..., H^{oo} имеем разложения:

$$N_1^{oo} = \sum_{K=0}^{\infty}(N_{1Ko}(\alpha)\cos K\beta + \hat{N}_{1Ko}(\alpha)\sin K\beta),\ldots,$$

$$H^{oo} = \sum_{K=0}^{\infty}(H_{Ko}(\alpha)\sin K\beta + \hat{H}_{Ko}(\alpha)\cos K\beta). \qquad 3)$$

Значения функций N_{1Ko} ,..., H_{Ko} определяются формулами, которые можно получить из приведенных в /2/ соответствующих зависимостей, если в них перейти от аргумента ψ к аргументу α, заменить номер n на K, поменять индексы n на Ko и затем принять:

$$N_{1q,Ko} = 0,\ldots, \quad H_{q,Ko} = 0, \quad (K \geqslant 0), \qquad (4)$$

$$C_{2к0} = 0, \quad D_{2к0} = 0, \quad D_{к0} = 0 \quad (к \geqslant 0)$$

$$2C_{00} = 0, \quad C_{10} = 0, \quad A_{00} = 0, \quad B_{00} = 0,$$

$$\lambda_{к0} = \lambda_{к0}^{(0)} = \left(ctg\frac{\alpha^0}{2}\, tg\frac{\alpha}{2}\right)^к \qquad (к \geqslant 2). \tag{5}$$

Функции $\hat{N}_{1к0}, \ldots, \hat{H}_{к0}$ находятся аналогичным образом в соответствии с соотношениями из /3/.

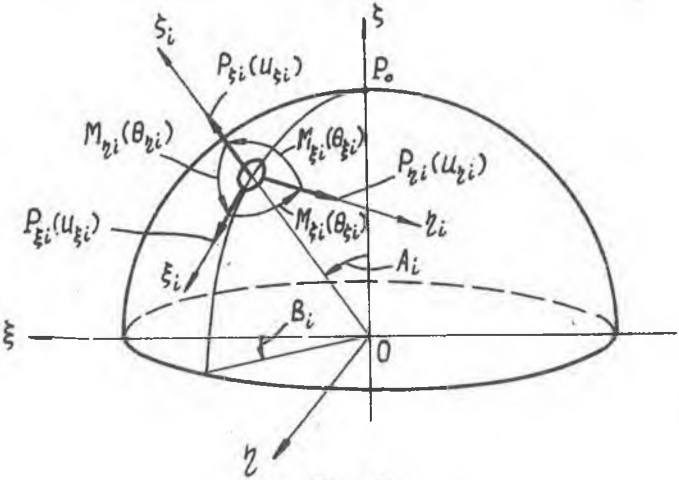

Рис. 2

3. Усилия и моменты $N_1^{ii}, \ldots, H^{ii}$ в сечениях $\psi_i = const$, $\varphi_i = const$, вызванные нагрузками, приложенными к i-ой шайбе, выражаются следующими рядами:

$$N_1^{ii} = \sum_{n_i=0}^{\infty} \left(N_{1ni}(\psi_i)\cos n_i\varphi_i + \hat{N}_{1ni}(\psi_i)\sin n_i\varphi_i\right), \ldots,$$

$$H^{ii} = \sum_{n_i=0}^{\infty} \left(H_{ni}(\psi_i)\sin n_i\varphi_i + \hat{H}_{ni}(\psi_i)\cos n_i\varphi_i\right). \tag{6}$$

Входящие сюда функции $N_{1ni}, \ldots, H_{ni}$ аргумента ψ_i находятся по формулам, которые следуют из упомянутых ранее соотношений в /2/, если в них, перейдя от угла ψ к ψ_i, заменить но-

...ер n на n_i, индексы n на ni и, наконец, принять:

$$N_{1qni}=0,\dots,\quad H_{qni}=0\quad (n_i\geqslant 0), \tag{7}$$

$$C_{1ni}=0,\quad D_{1ni}=0\ (n_i\geqslant 0),\quad C_{ni}=0\quad (n_i\geqslant 2),$$

$$\mu_{ni}=\mu_{ni}^{(i)}=\left(\operatorname{tg}\frac{\psi_i^\circ}{2}\operatorname{ctg}\frac{\psi_i}{2}\right)^{n_i}\quad (n_i\geqslant 2). \tag{8}$$

Здесь $2\psi_i^\circ$ – угловой размер i-ой шайбы.

Формулы для $\hat N_{1ni},\dots,\hat H_{ni}$ могут быть получены подобным же образом из /3/.

Если к i-ой шайбе приложена система сил $P_{\xi i}$, $P_{\eta i}$, $\hat P_{\xi i}$ и моментов $M_{\xi i}$, $M_{\eta i}$, $M_{\zeta i}$ (рис.2), то постоянные $2C_{oi},\dots,(\hat C_{1i}-\hat D_{1i})$ найдутся из соотношений /2,3/:

$$2C_{oi}=\frac{P_{\xi i}}{2\pi REh},\qquad C_{1i}+D_{1i}=-\frac{M_{\eta i}+P_{\xi i}R\cos\psi_i^\circ}{\pi R^2Eh(1+\delta)},$$

$$C_{1i}-D_{1i}=-\frac{P_{\xi i}}{\pi REh},\qquad 2\hat C_{oi}=\frac{M_{\zeta i}}{2\pi R^2Eh(1+\delta)},$$

$$\hat C_{1i}+\hat D_{1i}=\frac{M_{\xi i}-P_{\eta i}R\cos\psi_i^\circ}{\pi R^2Eh(1+\delta)},\qquad \hat C_{1i}-\hat D_{1i}=\frac{P_{\eta i}}{\pi REh}. \tag{9}$$

4. Перемещения в общей системе координат α, β можно представить следующим образом:

$$u^{(o)}=u^{oo}+\sum_{i=1}^{s}u^{oi},\qquad v^{(o)}=v^{oo}+\sum_{i=1}^{s}v^{oi},$$

$$w^{(o)}=w_p+w^{oo}+\sum_{i=1}^{s}w^{oi},$$

$$\vartheta_1^{(o)}=\vartheta_1^{oo}+\sum_{i=1}^{s}\vartheta_1^{oi},\qquad \vartheta_2^{(o)}=\vartheta_2^{oo}+\sum_{i=1}^{s}\vartheta_2^{oi}. \tag{10}$$

Здесь u^{oo}, v^{oo} w^{oo}, ϑ_1^{oo}, ϑ_2^{oo} – совокупность перемещений, ...званных краевыми самоуравновешенными нагрузками, приложенными ... нижнему краю оболочки, а также перемещений, соответствующих от...тствию удлинений и сдвигов срединной поверхности оболочки (в том ...сле перемещений, определяемых жестким смещением оболочки);

w_p – нормальное перемещение от действия внутреннего давле...я p:

$$w_p=\frac{pR^2(1-\mu)}{2Eh}; \tag{11}$$

$u^{oi}, v^{oi}, w^{oi}, \vartheta_1^{oi}, \vartheta_2^{oi}$ – перемещения в общей системе коор динат от нагрузок, приложенных к i-ой шайбе.

5. Для перемещений u^{oo} ,..., ϑ_2^{oo} будем иметь разложения:

$$u^{oo} = \sum_{k=0}^{\infty} (u_{ok}(\alpha)\cos k\beta + \hat{u}_{ok}(\alpha)\sin k\beta), \ldots,$$

$$\vartheta_2^{oo} = \sum_{k=0}^{\infty} (\vartheta_{2ko}(\alpha)\sin k\beta + \hat{\vartheta}_{2ko}(\alpha)\cos k\beta).$$

Выражения для перемещений u_{ko} ,..., ϑ_{2ko} можно вывести соответствующих формул в /2/ описанным ранее способом с учет (5) и условия

$$u_{qko} = 0, \ldots, \vartheta_{2qko} = 0 \quad (k \geqslant 0), \quad D^{*}_{ko} = 0 \quad (k \geqslant 2).$$

Формулы для $\hat{u}_{ko}$,..., $\hat{\vartheta}_{2ko}$ могут быть получены аналогичны путем из /3/.

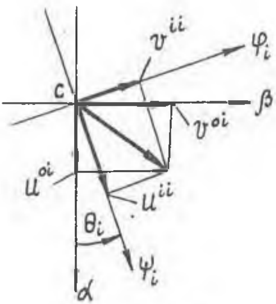

Рис. 3

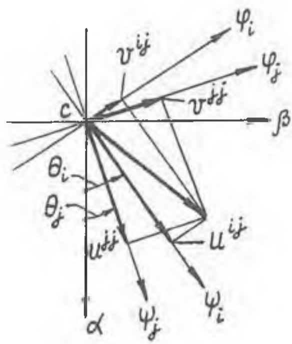

Рис. 4

6. Перемещения $u^{oi}, v^{oi}, w^{oi}, \vartheta_1^{oi}, \vartheta_2^{oi}$ находятся по фор мулам (рис.3):

$$u^{oi} = u^{ii}\cos\theta_i - v^{ii}\sin\theta_i, \quad v^{oi} = v^{ii}\cos\theta_i + u^{ii}\sin\theta_i,$$

$$w^{oi} = w^{ii},$$

$$\vartheta_1^{oi} = \vartheta_1^{ii}\cos\theta_i - \vartheta_2^{ii}\sin\theta_i, \quad \vartheta_2^{oi} = \vartheta_2^{ii}\cos\theta_i + \vartheta_1^{ii}\sin\theta_i, \quad (13)$$

где $u^{ii}, v^{ii}, w^{ii}, \vartheta_1^{ii}, \vartheta_2^{ii}$ – перемещения в i-ой системе координат, вызванные нагрузками i-ой жесткой шайбы:

$$u^{ii}=\sum_{n_i=0}^{\infty}(u_{ni}(\psi_i)\cos n_i\varphi_i+\hat{u}_{ni}(\psi_i)\sin n_i\varphi_i),\ldots,$$
$$\vartheta_2^{ii}=\sum_{n_i=0}^{\infty}(\vartheta_{2ni}(\psi_i)\sin n_i\varphi_i+\hat{\vartheta}_{2ni}(\psi_i)\cos n_i\varphi_i). \qquad (14)$$

Перемещения u_{ni} , ..., ϑ_{2ni} определяются формулами, которые можно получить из /2/ упомянутым ранее способом с учетом (8) и условий

$$u_{qni}=0,\ldots,\quad \vartheta_{2qni}=0\quad (n_i\geqslant 0),$$
$$C^{*}_{ni}=0\ (n_i\geqslant 0),\quad D^{*}_{1i}=0,\quad D^{*}_{0i}=0.$$

Подобным же образом получатся и перемещения $\hat{u}_{ni}$, ..., $\hat{\vartheta}_{2ni}$ в соответствии с /3/.

7. Для записи граничных условий по контурам жестких шайб нужно располагать перемещениями в i -ой местной системе координат , которые можно записать в следующем виде:

$$u^{(i)}=\sum_{j=0}^{s}u^{ij},\qquad v^{(i)}=\sum_{j=0}^{s}v^{ij},$$
$$w^{(i)}=w_F+\sum_{j=0}^{s}w^{ij},\qquad \vartheta_1^{(i)}=\sum_{j=0}^{s}\vartheta_1^{ij}. \qquad (15)$$

Здесь (рис.4):

$$u^{ij}=u^{jj}\cos(\theta_i-\theta_j)+v^{jj}\sin(\theta_i-\theta_j),$$
$$v^{ij}=v^{jj}\cos(\theta_i-\theta_j)-u^{jj}\sin(\theta_i-\theta_j),$$
$$w^{ij}=w^{jj},$$
$$\vartheta_1^{ij}=\vartheta_1^{jj}\cos(\theta_i-\theta_j)+\vartheta_2^{jj}\sin(\theta_i-\theta_j). \qquad (16)$$

θ_i , θ_j – углы, под которыми пересекаются меридианы $\varphi_i=const$ и $\varphi_j=const$ с меридианом $\beta=const$.

8. Располагая выражениями для $u^{(i)}$ и $w^{(i)}$, можно найти радиальные $u_r^{(i)}$ и осевые $u_\xi^{(i)}$ перемещения в i -ой системе координат (рис.5):

$$u_r^{(i)}=u^{(i)}\cos\psi_i+w^{(i)}\sin\psi_i,$$
$$u_\xi^{(i)}=-u^{(i)}\sin\psi_i+w^{(i)}\cos\psi_i. \qquad (17)$$

9. Запишем граничные условия по контуру i -ой шайбы $(\psi_i = \psi_i^0)$. Ввиду жесткости шайбы имеем /I/:

$$
\begin{aligned}
&u_r^{(i)}(\psi_i^0, \varphi_i) = \Delta_{\xi i} \cos\varphi_i + \Delta_{\eta i} \sin\varphi_i ,\\
&u_\zeta^{(i)}(\psi_i^0, \varphi_i) = \Delta_{\zeta i} - R\theta_{\eta i} \sin\psi_i^0 \cos\varphi_i + R\theta_{\xi i} \sin\psi_i^0 \sin\varphi_i ,\\
&v^{(i)}(\psi_i^0, \varphi_i) = R\theta_{\zeta i} \sin\psi_i^0 - \Delta_{\xi i} \sin\varphi_i + \Delta_{\eta i} \cos\varphi_i ,\\
&\vartheta_1^{(i)}(\psi_i^0, \varphi_i) = \theta_{\eta i} \cos\varphi_i - \theta_{\xi i} \sin\varphi_i .
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Здесь $\Delta_{\xi i}$, $\Delta_{\eta i}$, $\Delta_{\zeta i}$ - линейные перемещения i-ой шайбы вдоль осей ξ_i, η_i, ζ_i; $\theta_{\xi i}$, $\theta_{\eta i}$, $\theta_{\zeta i}$ - повороты шайбы вокруг этих осей (рис.2).

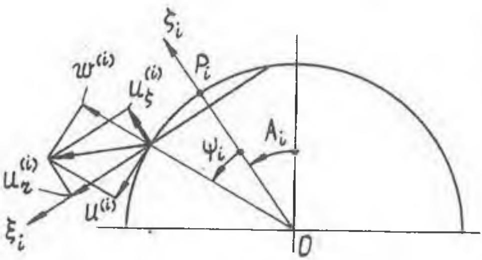

Рис. 5

Внося в (18) выражения для $u_r^{(i)}$, $u_\zeta^{(i)}$, $v^{(i)}$ и $\vartheta_1^{(i)}$, будем иметь общий вид граничных условий по контуру i-ой шайбы.

Добавляя к полученным таким образом $4s$ соотношениям условия закрепления оболочки по нижней опорной параллели $\alpha = \alpha^0$, придем к $4(s+1)$ зависимостям, из которых можно вывести бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных произвольных постоянных интегрирования.

Литература

I. Ахмедьянов И.С. Расчет сферической оболочки, нагруженной через эксцентрично расположенную жесткую шайбу. - Труды / Куйбышев. авиац.ин-т, 1973, вып. 60, с.28-43.

2. Ахмедьянов И.С. О расчете сферической оболочки при симметричном нагружении. - Изв. вузов. Авиационная техника, 1980, № 4, с.7-I2.

3. Ахмедьянов И.С. К расчету сферической оболочки при обратно симметричном нагружении. - Изв. вузов. Авиационная техника, 1982, № 2, с.47-50.

УДК 539.3

С.П.Кузнецов, В.Н.Паймушин, В.А.Фирсов

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С УПРУГИМИ ОСНОВАНИЯМИ

Работа посвящена исследованию осесимметричного деформирования оболочек вращения, взаимодействующих на лицевых поверхностях со сплошными или дискретными упругими основаниями. Основные соотношения общего варианта теории получены в /I/ в предположении, что рассматриваемая упругая система представляется в виде трехслойного пакета со слоями переменной толщины, и для каждого слоя пакета используется сдвиговая модель С.П.Тимошенко с учетом поперечного обжатия. Условия контакта слоев и отсутствия перемещений внешних лицевых поверхностей пакета позволили сформулировать краевую задачу для рассматриваемой упругой системы относительно компонентов вектора упругого перемещения оболочки, принятых в качестве искомых функций задачи.

I. Рассмотрим оболочку вращения, взаимодействующую на обеих лицевых поверхностях с упругими основаниями (рис.I) и находящуюся под действием произвольной системы поверхностных и контурных усилий, а также в условиях объемного температурного поля. Предполагается, что оболочка и упругие основания имеют среднюю относительную толщину. Для случая осесимметричного деформирования уравнения равновесия рассматриваемой упругой системы и граничные условия на контуре оболочки, выведенные в /I/, могут быть представлены в виде

$$L_i - (Q_i)_{,1} - X_i = 0, \quad (i = \overline{1,4}) \qquad (I)$$