ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 5, 1979

УДК 539.379

Б.А.Горлач, Н.Н.Орлов

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ НАГРУЖЕНИЙ, УЧИТЫВАЮЩИЙ ИЗМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ТЕЛА, В ЗАДАЧАХ О БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Для исследования конечных деформаций используется метод последовательных нагружений с уточнением геометрии на каждом шаге нагружения. Под геометрией (метрикой) тела понимаются функции, описывающие положение тела в пространстве. Сущность предлагаемого метода в случае статических задач при отсутствии массовых сил и неизменных граничных условиях заключается в следующем.

Пусть в некотором K -том состоянии тело находится в равновесии под действием поверхностной нагрузки. Для этого состояния известны геометрия и распределение напряжений. Под действием дополнительно приложенной силы тело переходит в новое $(K+1)$ -е состояние равновесия, для которого определяются перемещения, геометрические параметры и компоненты напряжений. После отыскания указанных функций процесс повторяют для $(K+2)$ -го состояния и т.д., пока не будут достигнуты заданные условия по нагрузкам или перемещениям.

I. Для решения задачи на $(K+1)$ -м шаге нагружения преобразуем вариационное уравнение равновесия, полученное в [I]:

$$\psi = \int_{v^K} \hat{Q} \cdot\cdot \overset{K}{\nabla} \delta \bar{u}\, dv^K - \int_{S^K} \bar{p} \cdot \delta \bar{u}\, ds^K = 0, \tag{I}$$

где

$$\hat{Q} = \rho^K \left(\frac{\hat{\sigma}^{K+1}}{\rho^{K+1}} - \frac{\hat{\sigma}^K}{\rho^K} - \frac{\hat{\sigma}^{K+1}}{\rho^{K+1}} \cdot \overset{K+1}{\nabla} \bar{u} \right) =$$

$$= \frac{\rho^{K}}{\rho^{K+1}} \hat{G}^{K+1} \cdot \overset{K+1}{\nabla} \bar{R}^{K} - \hat{G}^{K}, \tag{2}$$

$$\bar{R}^{K+1} = \bar{R}^{K} + \bar{u}, \tag{3}$$

$$\hat{G}^{K+1} = \hat{G}^{K} + \hat{\hat{G}}, \tag{4}$$

$$\bar{p} ds^{K} = \bar{p}^{K+1} ds^{K+1} - \bar{p}^{K} ds^{K}. \tag{5}$$

Здесь $\bar{R}^{K}$, v^{K}, s^{K}, ρ^{K}, $\bar{p}^{K}$, $\hat{G}^{K}$, $\overset{K}{\nabla}$ – соответственно радиус-вектор, объем, поверхность, плотность, поверхностная нагрузка, тензор напряжений и оператор Гамильтона в K -том состоянии; $\hat{G}$, $\bar{p}$, $\bar{u}$ – приращения тензора напряжений, поверхностной нагрузки и перемещения при переходе из K -го в $(K+1)$-е состояние.

Подставив в равенство (2) вместо тензора $\overset{K+1}{\nabla} \bar{R}^{K}$ его значение, найденное в [2]

$$\overset{K+1}{\nabla} \bar{R}^{K} = \sqrt{\frac{G^{K}}{G^{K+1}}} \left[(1 + I_1 + I_2)\hat{E} - (1 + I_1)\overset{K}{\nabla}\bar{u} + \overset{K}{\nabla}\bar{u} \cdot \overset{K}{\nabla}\bar{u} \right], \tag{6}$$

получим с учетом (4):

$$\hat{Q} = \hat{G} + \hat{G}^{K+1} \cdot \hat{A}, \tag{7}$$

где

$$\hat{A} = (I_1 + I_2)\hat{E} - (1 + I_1)\overset{K}{\nabla}\bar{u} + \overset{K}{\nabla}\bar{u} \cdot \overset{K}{\nabla}\bar{u}, \tag{8}$$

$\sqrt{\frac{G^{K}}{G^{K+1}}}$ – отношение материальных объемов K -го и $(K+1)$-го состояния; I_1, I_2 – главные инварианты тензора $\overset{K}{\nabla}\bar{u}$.

Соотношение (5) в случае действия на тело распределенной нагрузки, нормальной к его поверхности, примет вид:

$$\bar{p} ds^{K} = q^{K+1} \bar{N}^{K+1} ds^{K+1} - q^{K} \bar{N}^{K} ds^{K}, \tag{9}$$

$$q^{K+1} = q^{K} + q. \tag{10}$$

Здесь q^{K}, $\bar{N}^{K}$ – давление и единичный вектор нормали к поверхности K -го состояния; q – приращение давления при переходе из K -го в $(K+1)$-е состояние.

Следуя [3], выразим элемент поверхности ds^{K+1} через ds^{K}:

$$\bar{N}^{K+1} ds^{K+1} = \sqrt{\frac{G^{K+1}}{G^{K}}} \overset{K+1}{\nabla} \bar{R}^{K} \cdot \bar{N}^{K} ds^{K}. \qquad (11)$$

Перепишем равенство (9) с учетом (6), (8), (I0), (II):

$$\bar{p}\, ds^{K} = (q \bar{N}^{K} + q^{K+1} \hat{A} \cdot \bar{N}^{K}) ds^{K}. \qquad (12)$$

Формулы (I), (7), (8), (I2) позволяют для рассматриваемого этапа нагружения вычислить вектор перемещения $\bar{U}$. После его определения уточняется геометрия тела (3), находятся напряжения (4), нагрузки (5) и (I2). Затем процесс повторяют для $(K+2)$-го шага нагружения и т.д.

2. Возможны два пути решения уравнения (I). В первом варианте на каждом шаге нагружения задаем малые приращения нагрузки, а деформации считаем линейными:

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} (\overset{K}{\nabla} \bar{U} + \overset{K}{\nabla} \bar{U}^{T}). \qquad (13)$$

Выражения (7), (8), (I2) упрощаются:

$$\hat{Q} = \hat{G} + \hat{G}^{K} \cdot \hat{A}, \quad \hat{A} = I_1 \hat{E} - \overset{K}{\nabla} \bar{u}, \quad \bar{p} = q \bar{N}^{K} + q^{K} \hat{A} \cdot \bar{N}^{K}. \qquad (14)$$

Нахождение решения уравнения (I) в данном случае не представляет принципиальной сложности. Однако для достижения удовлетворительной точности в задачах с ярко выраженной геометрической нелинейностью требуется большое число шагов нагружения.

Во втором варианте на каждом шаге нагружения задаем большие приращения нагрузки, а деформации считаем конечными:

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} (\overset{K}{\nabla} \bar{u} + \overset{K}{\nabla} \bar{u}^{T} + \overset{K}{\nabla} \bar{u} \cdot \overset{K}{\nabla} \bar{u}^{T}). \qquad (15)$$

В этом случае уравнение (I) можно решать, например, методом Ньютона, в соответствии с которым вектор перемещения $\bar{U}$ представим в виде суммы:

$$\bar{u} = \bar{u}_j + \bar{W}_j, \qquad (16)$$

где $\bar{u}_j$ – вектор приближенного решения, $\bar{W}_j$ – вектор поправки (j – номер итерации).

Погрешность решения уравнения (I) определяется по формуле

$$\psi_j = \int_{v^K} \hat{Q}_j \cdot\cdot \overset{K}{\nabla} \delta \bar{u}\, \delta v^{K} - \int_{S^K} \bar{p}_j \cdot \delta \bar{u}\, ds^{K}, \qquad (17)$$

$$\hat{Q}_j = \hat{G}_j + \hat{G}_j^{k+1} \cdot \hat{A}_j, \quad \bar{p}_j = q \bar{N}^k + q^{k+1} \hat{A}_j \cdot \bar{N}^k,$$

$$\hat{A}_j = (I_{1j} + I_{2j}) \hat{E} - (1 + I_{1j}) \overset{k}{\nabla} \bar{u}_j + \overset{k}{\nabla} u_j \cdot \overset{k}{\nabla} u_j .$$

Составим уравнение для отыскания поправок $\bar{W}_j$, для чего ...тем из соотношения (I) погрешность решения (I7):

$$\int_{v^k} \Delta \hat{Q}_j \cdot\cdot \overset{k}{\nabla} \delta \bar{u} \, dv^k - \int_{s^k} \Delta \bar{p}_j \cdot \delta \bar{u} \, ds^k = -\psi_j . \qquad (18)$$

Здесь

$$\Delta \hat{Q}_j = \hat{Q} - \hat{Q}_j = \Delta \hat{G}_j \cdot \hat{T}_j + \hat{G}_j^{k+1} \cdot \Delta \hat{A}_j ,$$

$$\Delta \bar{p}_j = \bar{p} - \bar{p}_j = q^{k+1} \Delta \hat{A}_j \cdot \bar{N}^k, \quad \Delta \hat{G}_j = \hat{G} - \hat{G}_j , \qquad (19)$$

$$\Delta \hat{A}_j = \hat{A} - \hat{A}_j , \quad \hat{T}_j = \hat{E} + \hat{A}_j .$$

В первой из формул (I9) отброшено произведение $\Delta \hat{G}_j \cdot \Delta \hat{A}_j$, ...ющее более высокий порядок малости по сравнению с остальными ...гаемыми.

Итак, решение уравнения (I), когда деформации внутри шага ...ечны, ищется в виде (I6). В качестве начального приближения ...жет быть использовано решение линейной задачи (I3)-(I4). ...очнение решения

$$\bar{u}_{j+1} = \bar{u}_j + \bar{W}_j$$

...кращается при достижении, например, условия

$$\frac{\| \psi_j \|}{\left\| \int_{s^k} \bar{p}_{j+1} \cdot \delta \bar{u} \, ds \right\|} < \varepsilon ,$$

...е ε – допустимая погрешность.

Запишем компоненты тензора $\hat{A}$ (7) в произвольной криволиней... системе координат:

$$A_1^1 = \nabla_2 u^2 + \nabla_3 u^3 + \underline{\nabla_2 u^2 \nabla_3 u^3} - \nabla_2 u^3 \nabla_3 u^2 ,$$

$$A_1^2 = -\nabla_1 u^2 + \nabla_1 u^3 \nabla_3 u^2 - \underline{\nabla_3 u^3 \nabla_1 u^2} . \qquad (20)$$

Если для одного шага нагружения удлинения малы по сравнением с единицей, т.е. $1+\nabla_i u^i \approx 1$, то выражения для компонент тензоров $\hat{A}$, $\hat{T}$ упростятся:

$$A_1^1 = \nabla_2 u^2 + \nabla_3 u^3 - \nabla_2 u^3 \nabla_3 u^2,$$

$$A_1^2 = -\nabla_1 u^2 + \nabla_1 u^3 \nabla_3 u^1, \qquad (21)$$

$$T_1^1 = 1 - \nabla_2 u^3 \nabla_3 u^2,$$

$$T_1^2 = -\nabla_1 u^2 + \nabla_1 u^3 \nabla_3 u^1.$$

Компоненты тензора $\Delta\hat{A}$ согласно (20) с принятой ранее точностью запишутся в виде:

$$\Delta A_1^1 = \nabla_2 W^2 + \nabla_3 W^3 - \nabla_2 W^3 \nabla_3 u^2 - \nabla_2 u^3 \nabla_3 W^2,$$

$$\Delta A_1^2 = -\nabla_1 W^2 + \nabla_1 u^3 \nabla_3 W^2 + \nabla_1 W^3 \nabla_3 u^2 - \nabla_3 W^3 \nabla_1 u^2. \qquad (22)$$

Остальные компоненты тензоров $\hat{A}$, $\hat{T}$ и $\Delta\hat{A}$ получаются из формул (20)-(22) соответствующей перестановкой индексов.

4. В качестве примера, иллюстрирующего возможности предлагаемого метода, исследовано поведение шарнирно опертой круглой пластины толщиной h = 1 мм и радиусом R = 100 мм под действием равномерного давления.

Таблица I

Давление q [кГ/см^2]	Прогиб в центре [мм]	Изгибные напряжения в центре [кГ/см^2]	Мембранные напряжения в центре [кГ/см^2]	Мембранные напряжения в заделке [кГ/см^2]
0.0487	1.046 / 1.05	164.8 / 165	101.4 / 101	75.14 / 71
0.832	2.867 / 2.85	378.5 / 379	801.2 / 800	632.7 / 601
4.207	4.923	630.9	2396	1923
47.92	11.15	-1409	12130	9754

Физические соотношения взяты в форме закона Гука[ж)] с модулем Юнга $E = 10^6$ кГ/см^2 и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$. Некоторые результаты расчётов, выполненных на основе второго варианта решения уравнения (I) (п. 2 статьи), представлены в таблице I.

Данные расчетов для давлений $q = 0.0487$ кГ/см^2 и 0.832 кГ/см^2 совпадают с результатами работы [4], приведенными в знаменателе первых двух строк.

Вычисления показали, что инерационный процесс на каждом шаге нагружения устойчиво сходится вплоть до прогибов, сопоставляемых с радиусом пластины, однако при давлениях, больших 47.92 кГ/см^2 (последняя строка таблицы), результаты лишены реального смысла, так как здесь следует учитывать физическую нелинейность.

Литература

I. Горлач Б.А., Орлов Н.Н. Принцип Даламбера-Лагранжа для твердых деформируемых тел с начальными напряжениями. - В кн.: Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сборник, вып. 3, изд. КуАИ, 1977.

2. Горлач Б.А., Орлов Н.Н. О зависимости между контрвариантными базисными векторами для деформируемых сред. - В кн.: Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сборник, вып. 4, изд. КуАИ, 1978.

3. Лурье А.И. Теория упругости. М., "Наука", 1970.

4. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М., "Наука", 1964.

В принципе изложенная методика может быть использована при произвольном характере физических соотношений.