некоторых сочетаний типовых процессов. То или иное сочетание обозначается группой цифр в виде $i(\ell)-j(m)-\kappa(n)$. Здесь i, j, κ обозначают номер типовой спектральной плотности или корреляционной функции в таблице I. Цифры в скобках обозначают соответствующие числовые параметры из таблицы 2.

Анализ полученных результатов показывает, что надлежащим выбором числа узлов интерполяции случайных величин неканонического разложения можно добиться достаточно точного представления реализаций узкополосных случайных процессов и случайных процессов сложной структуры по формуле (5). Это доказывает приемлемость принципа суперпозиции при моделировании реализаций. Для моделирования узкополосных процессов необходимо брать по два узла интерполяции случайных величин γ и δ и восемь узлов интерполяции случайной величины ω. В случае моделирования случайных процессов сложной структуры необходимое число узлов интерполяции для ω возрастает.

Литература

I. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. - М.: Физматгиз, I960. - 883 с.
2. Чернецкий В.И. Анализ точности нелинейных систем управления. - М.: Машиностроение, I968. - 246 с.

УДК 629.7.02:534.I

А.В.Бобров, Н.И.Гриненко

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

Задачи устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек сегодня остаются наиболее интересными для практики. Этот интерес поддерживается тем, что многофункциональность конструкций, их структурная неоднородность, связанная с весовой оптимизацией, порождает вопросы, ранее не исследованные в теории. Четыре-пять нагрузок, одновременно или с определенной последовательностью действующих на конструкцию, обычно не рассматривались. Чаще всего ограничиваются рассмотрением случая одновременного действия двух нагрузок: осевого сжатия и равномерного внешнего (внутреннего) давления. Остальные действующие нагрузки приводят к указанным: изгибающий момент - к эквивалентному осевому сжатию, а радиальное локальное давление - к равномерному с каким-либо коэффициентом. К таким упрощениям прибегают для удобства использования теоремы П.Ф.Папковича о границе области устойчивости при совместном действии нагрузок. От подкупающей простоты этой теоремы приходится отказываться, когда исходное докритическое напряженно-деформированное состояние оболочки становится существенно неоднородным, отчего нелинейный анализ становится обязательным.

Отработка методики, позволяющей определять несущую способность тонкостенной цилиндрической оболочки при произвольном комбинированном нагружении с учетом нелинейности исходного состояния, осуществляется в три этапа. В статье приводятся результаты первого: устойчивость оболочки при комбинированном нагружении исследуется в классической постановке. Принимается, что в докритическом состоянии оболочка напряжена, но не деформирована. Докритические усилия в оболочке определяются по безмоментной теории. Основная цель этого этапа - алгоритм, пригодный для решения задачи устойчивости с любыми граничными условиями на торцах оболочки. Алгоритм должен: позволять реализацию необходимой степени дискретизации оболочки, не требовать чрезмерно большой оперативной памяти ЭВМ при решении задачи, обеспечивать решение задачи с небольшими затратами процессорного времени, так как в дальнейшем этот алгоритм будет использоваться для решения задачи устойчивости при нелинейном докритическом состоянии, когда обращение к итерационному процессу неизбежно.

Используется вариант статического критерия устойчивости равновесного состояния - энергетический: вторая вариация полной потенциальной энергии деформируемой системы при условии безразличного равновесия $\delta^2 \Pi = 0$ /I/ . Когда нагрузка на оболочку равна критической, для оболочки возможны, и притом два, бесконечно близких положения равновесия. Перемещения, соответствующие тому положению, которое в рассматриваемый момент теряет свою устойчивость, обозначим через u_o , v_o , w_o , а перемещения, соответствующие другому - через

$$u = u_o + \alpha u_1 , \quad v = v_o + \alpha v_1 , \quad w = w_o + \alpha w_1 . \qquad (I)$$

Здесь $\alpha u_1(x,y)$, $\alpha v_1(x,y)$, $\alpha w_1(x,y)$ - те дополнительные перемещения, которые нужно сообщить точкам оболочки, находящимся в исходном положении равновесия. Функции u_1 , v_1 , w_1 считаются конечными, а коэффициент α - бесконечно малой, независимой от x , y , z величиной. Компоненты деформации, соответствующие второму положению равновесия, получим через компоненты деформации исходного положения равновесия и дополнительные перемещения из выражений для деформаций нелинейной теории упругости /2/:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \varepsilon^{\circ}_{11} + \alpha\,\varepsilon'_{11} + \alpha^2\,\varepsilon''_{11} \\
\varepsilon_{22} &= \varepsilon^{\circ}_{22} + \alpha\,\varepsilon'_{22} + \alpha^2\,\varepsilon''_{22} \\
\varepsilon_{12} &= \varepsilon^{\circ}_{12} + \alpha\,\varepsilon'_{12} + \alpha^2\,\varepsilon''_{12} \\
\varkappa_{11} &= \varkappa^{\circ}_{11} + \alpha\,\varkappa'_{11} + \alpha^2\,\varkappa''_{11} \\
\varkappa_{22} &= \varkappa^{\circ}_{22} + \alpha\,\varkappa'_{22} + \alpha^2\,\varkappa''_{22} \\
\varkappa_{12} &= \varkappa^{\circ}_{12} + \alpha\,\varkappa'_{12} + \alpha^2\,\varkappa''_{22},
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где ε°_{ij}, $\varkappa^{\circ}_{ij}$, i, j = I,2 - линейные слагаемые компонентов деформаций в исходном положении равновесия (совпадают по форме с /2/); ε'_{ij}, $\varkappa'_{ij}$ - параметры, зависящие от производных u_o, v_o, w_o и производных u_1, v_1, w_1 (так как рассматривается задача с напряженным, но недеформированным исходным состоянием, то выражения для ε'_{ij}, $\varkappa'_{ij}$ получаются из ε°_{ij}, $\varkappa^{\circ}_{ij}$ заменой нижнего индекса 0 на I);

$$
\begin{aligned}
\varepsilon'_{11} &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}; \qquad \varkappa'_{11} = -\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha_1^2}, \\
\varepsilon'_{22} &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + \frac{w_1}{R}; \quad \varkappa'_{22} = -\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha_2^2} + \frac{w_1}{R}, \\
\varepsilon'_{12} &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}; \quad \varkappa'_{12} = -\frac{2}{A_1A_2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2};
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

ε''_{ij}, $\varkappa''_{ij}$ - параметры, зависящие только от производных u_1, v_1, w_1 и содержащие притом только квадратичные члены

$$
\begin{aligned}
\varepsilon''_{11} &= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{A_1}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1}\Big)^2\Big]; \\
\varepsilon''_{22} &= \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{A_2}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + \frac{w_1}{R}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_2} - \frac{v_1}{R}\Big)^2\Big], \\
\varepsilon''_{12} &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}\cdot\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1}\Big(\frac{1}{A_2}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + \frac{w_1}{R}\Big) + \\
&+ \frac{1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1}\Big(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_2} - \frac{v_1}{R}\Big),
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

$$\varkappa''_{11} = -\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha_1^2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{w_1}{R}\right),$$

$$\varkappa''_{22} = -\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha_2^2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{w_1}{R}\right) +$$

$$+ \frac{w_1}{R^2}\left(\frac{3}{A_2}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + \frac{2}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{w_1}{R}\right),$$

$$\varkappa''_{12} = -\frac{2}{A_1 A_2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{w_1}{R}\right) +$$

$$+ \frac{1}{R}\frac{1}{A_1}\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{w_1}{R}\right).$$

Подставив (2) в формулы закона Гука, будем иметь:
для напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma^{\circ}_{ij} + \alpha\sigma'_{ij} + \alpha^2\sigma''_{ij}\,; \quad i, j = 1, 2$$

для усилий и моментов

$$T_{ij} = T^{\circ}_{ij} + \alpha T'_{ij} + \alpha^2 T''_{ij}$$

$$M_{ij} = M^{\circ}_{ij} + \alpha M'_{ij} + \alpha^2 M''_{ij}.$$

С учетом введенных обозначений энергия деформации оболочки запишется в виде

$$Э = Э^{\circ} + \alpha Э' + \alpha^2 Э'' + \alpha^3 Э''' + \alpha^4 Э^{IV}.$$

Для решения задачи устойчивости достаточно рассмотреть слагаемые только до α^2 эключительно /I/:

$$Э = Э^{\circ} + \alpha Э' + \alpha^2 Э''.$$

Величина $\alpha^2 Э''$ пропорциональна второй специальной вариации полной потенциальной энергии деформации, поэтому для состояния безразличного равновесия будет $Э'' = 0$. Запишем через усилия и деформации:

$$Э'' = \frac{1}{2}\iint\limits_S \Big(\sum_{ij} T'_{ij}\,\varepsilon'_{ij} + \sum_{ij} M'_{ij}\,\varkappa'_{ij}\Big)dx\,dy + \iint\limits_S \Big(\sum_{ij} T^{\circ}_{ij}\,\varepsilon''_{ij} + \sum_{ij} M^{\circ}_{ij}\,\varkappa''_{ij}\Big)dx\,dy = 0. \qquad (5)$$

Из этого вариационного уравнения устойчивости находим параметры нагрузок и функций, описывающих форму оболочки в момент перехода ко второму положению равновесия. При заданном сочетании известных нагрузок P_K неизвестная сила $\bar{P}$ определяется функционалом

$$\bar{P}=\left\{\frac{\frac{1}{2}\iint_S\left(\sum_{ij}T'_{ij}\varepsilon'_{ij}+\sum_{ij}M'_{ij}\varkappa'_{ij}\right)dxdy-\iint\sum_K P_K f''_K\,dxdy}{\iint_S \bar{f}''\,dxdy}\right\}. \quad (6)$$

Значение неизвестной критической нагрузки получается минимизацией по параметрам перемещений u_1 , v_1 , w_1 .

Для перехода от бесконечномерного функционала к его конечномерной аппроксимации перемещения u_1 , v_1 , w_1 представим в виде произведения двух независимых функций:

$$u_1(x,y)=\gamma(x)\cdot u(y)$$
$$v_1(x,y)=\gamma(x)\cdot v(y) \quad (7)$$
$$w_1(x,y)=\gamma(x)\cdot w(y).$$

Разобьем оболочку вдоль оси на кольцевые элементы длиной „a" и функцию от осевой координаты представим как сумму произведений кубических интерполяционных полиномов Эрмита от переменной x на перемещения и углы поворота краев колец

$$\gamma(x)=\sum_{i=1}^{2}\left[H_{0i}(x)\beta_i+H_{1i}(x)\beta_{x_i}\right],$$

где β_i - перемещения (u_1 , v_1 , w_1) на i -ом краю кольца;
β_{x_i} - углы поворота (u_{x_1} , v_{x_1} , w_{x_1}) на i -ом краю кольца;
$H_{0i}(x)$, $H_{1i}(x)$ - полиномы Эрмита,

$$H_{01}(x)=(2x^3-3ax^2+a^3)/a^3$$

$$H_{02}(x)=-(2x^3-3ax^2)/a^3$$

$$H_{11}(x)=(x^3-2ax^2+a^2x)/a^2$$

$$H_{12}(x)=(x^3-ax^2)/a^2.$$

Для функций, зависящих от окружной координаты, удобны ряды Фурье. Из бесконечного ряда выделим диапазон от n_1 до n_2 :

$$u(y)=\sum_{n=n_1}^{n_2} u_n \cos n\frac{y}{R}$$

$$v(y)=\sum_{n=n_1}^{n_2} v_n \sin n\frac{y}{R}$$

$$w(y)=\sum_{n=n_1}^{n_2} w_n \cos n\frac{y}{R}.$$

После подстановки перемещений (7) в (3), (4), а затем в (6) интегрирование проводим по квадратурным формулам Гаусса-Лежандра (трехточечная схема), а минимизацию - методом сопряженных направлений Пауэлла /3/. Минимизация проводится относительно параметров перемещений и углов поворота на краях кольцевых элементов и коэффициентов в рядах Фурье при заданных n_1 и n_2.

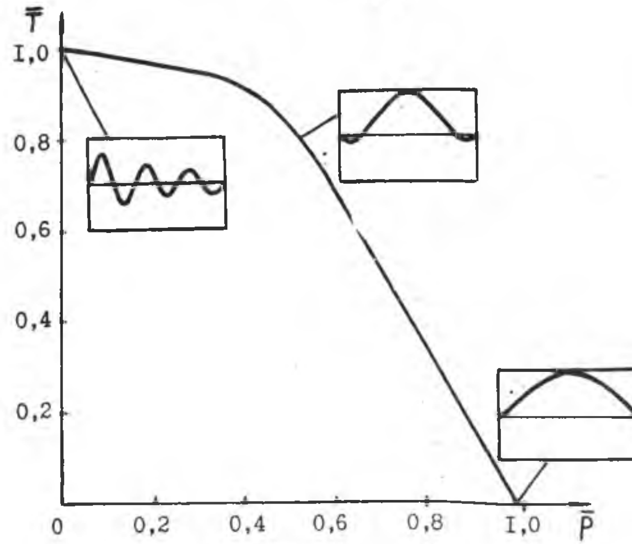

Рис.

Описанный алгоритм удовлетворяет ранее сформулированным требованиям. Конечномерная аппроксимация позволяет получать различные граничные условия на торцах оболочки и требуемую степень дискретизации для учета особенностей конструкции и нагрузки. Возможно и решение нелинейных задач, для чего в выражениях для деформаций и кривизн учитываются нелинейные слагаемые. При решении задач не требуется большой оперативной памяти ЭВМ и чрезмерных затрат машинного времени (алгоритм реализован на СМ ЭВМ).

В качестве примера построена область устойчивости для гладкой изотропной оболочки с L/R = I и R/h = 200. Оболочка нагружалась осевым сжатием T и внешним давлением p. Докритические усилия

$$T^{\circ}_{11} = -T, \quad T^{\circ}_{22} = -pR, \quad T^{\circ}_{12} = 0$$
$$M^{\circ}_{11} = M^{\circ}_{22} = M^{\circ}_{12} = 0.$$

Граничные условия на торцах соответствовали шарнирному закреплению $u_1 = v_1 = w_1 = w_{x_1} = 0$.

По длине оболочки оказалась достаточной разбивка на три элемента, а в рядах Фурье - удержание пяти членов (n_1 = 8, n_2= I2). Даже при такой малой размерности задачи численные результаты достаточно хорошо согласуются с аналитическим решением. На рисунке показана область устойчивости. В точках пересечения с осями получены значения безразмерных нагрузок $\bar{T}_{p=0}$ = I,008, $\bar{P}_{T=0}$ = 0,98, хорошо соответствующих известным классическим решениям. Неплохо отслеживается и форма искривленной поверхности оболочки. Обнадеживающие результаты позволяют рассчитывать на успех в задачах устойчивости оболочек, дополнительно нагруженных по части боковой поверхности произвольно распределенным давлением.

Литература

I. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. - М.: Машиностроение, I978. - 3I2 с.

2. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. - ОГИЗ. Гостехиздат, I948. - 2II с.

3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. Пер. с англ. - М.: Мир, I975. - 534 с.

УДК 629.7.02:534.I

С.А.Бурцев, Н.И.Гриненко, Ю.М.Хищенко

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОЖИВАЛЬНОЙ И КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

В пределах линейной теории устойчивости анализируются особен-