ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, 1980

УДК 539.3:534.1

М.Б.Вахитов, И.С.Селин,
Т.Ф.Тинчурин

КОЛЕБАНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ПЛАСТИНЧАТЫХ РАМ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

В работе [1] была получена система пяти интегродифференциальных уравнений, описывающих свободные колебания типового участка пластинчатой рамы. На основании этих уравнений рассмотрим свободные колебания статически неопределимой пространственной пластинчатой рамы. При раскрытии статической неопределимости воспользуемся рекомендациями работ [2, 3] по выбору основной системы. Рассмотрим ξ -й элемент основной системы (рис.1 - изображен граф элемента). Условия стыковки участков элемента описываются следующими соотношениями:[x]

$$
\begin{gathered}
Q^*_{xj} = Q^0_{xj+1} + \hat{Q}_{xj}, \quad Q^*_{yj} = Q^0_{yj+1}\cos\alpha_{j+1} + Q^0_{zj+1}\sin\alpha_{j+1} + \hat{Q}_{yj}\cos\hat{\alpha}_j + \hat{Q}_{zj}\sin\hat{\alpha}_j, \\
Q^*_{zj} = Q^0_{zj+1}\cos\alpha_{j+1} - Q^0_{yj+1}\sin\alpha_{j+1} + \hat{Q}_{zj}\cos\hat{\alpha}_j + \hat{Q}_{yj}\sin\hat{\alpha}_j, \quad M^*_{xj} = M^0_{xj+1} + \hat{M}_{xj}, \\
M^*_{yj} = M^0_{yj+1}\cos\alpha_{j+1} + M^0_{zj+1}\sin\alpha_{j+1} + \hat{M}_{yj}\cos\hat{\alpha}_j + \hat{M}_{zj}, \qquad (1) \\
M^*_{zj} = M^0_{zj+1}\cos\alpha_{j+1} - M^0_{yj+1}\sin\alpha_{j+1} + \hat{M}_{zj}\cos\alpha_j - \hat{M}_{yj}\sin\hat{\alpha}_j, \\
\mathcal{M}^*_{\xi j} = \mathcal{M}^0_{\xi j+1} + \hat{\mathcal{M}}_{\xi j}.
\end{gathered}
$$

---

x) **Знак $\wedge$ над буквой означает узловую нагрузку.**

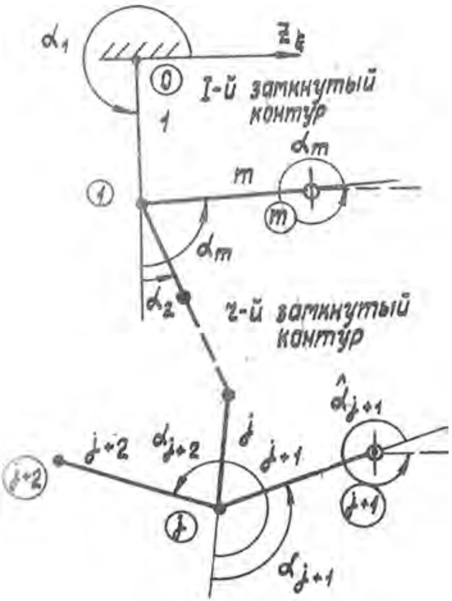


Рис. I

Запишем уравнения типового участка ξ -го элемента в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&r_0 f'' + r_1 \varphi'' - M_x = 0,\\
&r_1 f'' + r_2 \varphi'' - \mathfrak{M}_z = 0, \qquad (2)\\
&\bar{E} J_y \theta' - \bar{E} S_y e' - M_y = 0,\\
&\bar{E} F e' - \bar{E} S_y \theta - Q_z = 0,\\
&GFu' - GF\theta - Q_x = 0,
\end{aligned}
$$

где

$$Q_x = \omega^2 \int_z^{\ell} (q_0 u \, dz) + Q_x^*,$$

$$Q_y = \omega^2 \int_z^{\ell} (q_0 f + q_1 \varphi) \, dz + Q_y^*,$$

$$
\begin{aligned}
&Q_z = \omega^2 \int_z^{\ell} (q_0 e - q_1 \theta) \, dz + Q_z^*,\\
&M_x = \omega^2 \int_z^{\ell} (J_0 f' + J_1 \varphi') \, dz + \int_z^{\ell} Q_y \, dz + M_x^*, \qquad (3)\\
&M_y = \int_z^{\ell} GFu' \, dz - \int_z^{\ell} GF\theta \, dz - \omega^2 \int_z^{\ell} (q_2 \theta - q_1 e) \, dz + M_y^*,\\
&\mathfrak{M}_z = \omega^2 \int_z^{\ell} (J_1 f' + J_2 \varphi') \, dz + \int_z^{\ell} (M_z - t_0 \varphi') \, dz + \mathfrak{M}_z^*.
\end{aligned}
$$

Далее, последовательно записывая выражения (3) для всех участков ξ -го элемента, начиная с концевых, с учетом условий (I) получим следующие выражения для j -го участка элемента :

$$Q_{yj} = \omega^2 \Big\{ \int_{z_j}^{\ell_j} (q_{0j} f_j + q_{1j} \varphi_j) \, dz_j + \sum_{\nu=j+1}^{m} \Big[\cos\beta'_{j\nu} \int_0^{\ell_\nu} (q_{0\nu} f_\nu + q_{1\nu} \varphi_\nu) \, dz_\nu +$$

$$+ \sin\beta'_{j\nu} \int_0^{\ell_\nu} (q_{0\nu} e_\nu - q_{1\nu} \theta) \, dz_\nu \Big] \Big\} + \sum_{\mu=j}^{m} \Big[\cos\hat{\beta}_{j\mu} \hat{Q}_{y\mu} + \sin\beta_{j\mu} \hat{Q}_{z\mu} \Big],$$

$$Q_{zj}=\omega^2\Big\{\int_{z_j}^{\ell_j}(q_{0j}e_j+q_{1j}\theta_j)dz_j+\sum_{\nu=j+1}^{m}\Big[\cos\beta'_{j\nu}\int_0^{\ell_\nu}(q_0e_\nu-q_{10}\theta_\nu)dz_\nu- \tag{4}$$

$$-\sin\beta'_{j\nu}\int_0^{\ell_\nu}(q_{0\nu}f_\nu+q_{10}\varphi_\nu)dz_\nu\Big]\Big\}+\sum_{\mu=j}^{m}\big[\cos\hat\beta_{j\mu}\hat Q_{z\mu}-\sin\hat\beta_{j\mu}Q_{y\mu}\big],$$

$$Q_{xj}=\omega^2\Big(\int_{z_j}^{\ell_j}q_{0j}u_j\,dz_j+\sum_{\nu=j+1}^{m}\int_0^{\ell_\nu}q_{0\nu}u_\nu\,dz_\nu\Big)+\sum_{\mu=j}^{m}Q_{x\mu},$$

$$M_{xj}=\omega^2\Big[\int_{z_j}^{\ell_j}(J_{0j}f'_j+J_{1j}\varphi'_j)dz_j+\sum_{\nu=j+1}^{m}\int_0^{\ell_\nu}(J_{0\nu}f'_\nu+J_{1\nu}\varphi'_\nu)dz_\nu\Big]+\int_{z_j}^{\ell_j}Q_{yj}\,dz_j+$$

$$+\sum_{\mu=j}^{m}\hat M_{x\mu},$$

$$M_{yj}=\int_{z_j}^{\ell_j}G_jF_j\theta_j\,dz_j+\int_{z_j}^{\ell_j}G_jF_ju'_j\,dz_j+\omega^2\int_{z_j}^{\ell_j}(q_{2j}\theta_j-q_{1j}e_j)dz_j+$$

$$+\sum_{\nu=j+1}^{m}\Big\{\cos\beta'\nu\Big[-\int_0^{\ell_\nu}G_\nu F_\nu\theta_\nu dz_\nu+\int_0^{\ell_\nu}G_\nu F_\nu u'_\nu dz_\nu+\omega^2\int_0^{\ell_\nu}(q_{2\nu}\theta_\nu-q_{1\nu}e_\nu)dz_\nu\Big]+$$

$$+\sin\beta'\nu_j\Big[\omega^2\int_0^{\ell_\nu}(q_{1\nu}f_\nu+q_{2\nu}\varphi_\nu)dz_\nu\Big]\Big\}+\sum_{\mu=j}^{m}\big[\cos\hat\beta_{j\mu}M_{y\mu}+\sin\hat\beta_{j\mu}\hat M_{z\mu}\big],$$

$$M_{zj}=\omega^2\int_{z_j}^{\ell_j}(q_{1j}f_j+q_{2j}\varphi_j+J_{0j}\varphi_j)dz_j+\sum_{\nu=j+1}^{m}\Big\{\cos\beta'_{\nu j}\int_0^{\ell_\nu}(q_{1\nu}f_\nu+q_{2\nu}\varphi_\nu+J_{0\nu}\varphi_\nu)dz_\nu\Big]-$$

$$-\sin\beta'_{\nu j}\Big[-\int_0^{\ell_\nu}G_\nu F_\nu\theta_\nu dz_\nu+\int_0^{\ell_\nu}G_\nu F_\nu u'_\nu dz_\nu+\omega^2\int_0^{\ell_\nu}(q_{2\nu}\theta_\nu-q_{1\nu}e_\nu)dz_\nu\Big]\Big\}+$$

$$+\sum_{\mu=j}^{m}\big[\cos\hat\beta_{j\mu}\hat M_{z\mu}-\sin\hat\beta_{j\mu}\hat M_{y\mu}\big],$$

$$\mathfrak{M}_j=\omega^2\int_{z_j}^{\ell_j}(J_{1j}f'_j+J_{2j}\varphi'_j)dz_j+\int_{z_j}^{\ell_j}(M_{zj}-t_{0j}\varphi'_j)dz_j+\sum_{\nu=j+1}^{m}\Big[\omega^2\int_0^{\ell_\nu}(J_{1\nu}f'_\nu+$$

$$+J_{2\nu}\varphi'_\nu)dz_\nu+\int_0^{\ell_\nu}(M_{z\nu}-t_{0\nu}\varphi'_\nu\Big]+\sum_{\mu=j}^{m}\hat{\mathfrak{M}}_j,$$

где

$$\beta'_{\nu j}=\sum_{\lambda=j+1}^{\nu}\alpha\lambda,\quad \hat\beta_{\mu j}=\sum_{\lambda=j+1}^{\mu}\alpha\lambda+\hat\alpha_\mu,$$

$\sum\limits_{\nu}^{m}$ – сумма по участкам элемента; $\sum\limits_{\mu}^{m}$ – сумма по узлам элемента;

m – число участков в ξ -ом элементе рамы.

Подставляя (4) в (3) и принимая во внимание, что под узловой нагрузкой подразумеваются лишние неизвестные, введенные при образовании основной системы ($\hat{Q}_x \to X_1$, $\hat{Q}_y \to X_2$, $\hat{Q}_z \to X_3$, $\hat{M}_x \to X_4$, $\hat{M}_y \to X_5$, $\hat{M}_z \to X_6$, $m_t \to X_7$), получим систему уравнений, описывающих свободные колебания ξ -го элемента рамы:

$$r_{0j} f_j'' + r_{1j}\varphi_j'' - \omega^2\Big[\int_{z_j}^{l_j}(\mathcal{J}_{0j} f_j' + \mathcal{J}_{1j}\varphi_j')dz_j + \sum_{\nu=j+1}^{m}\int_0^{l_\nu}(\mathcal{J}_{0\nu} f_\nu' + \mathcal{J}_{1\nu}\varphi_\nu')dz_\nu\Big] + \sum_{\nu=j+1}^{m}\int_0^{l_\nu} Q_{y\nu}\,dz_\nu + \sum_{\nu=j+1}^{m}\int_0^{l_\nu} Q_{y\nu}\,dz_\nu + \sum_{r=1}^{R_\xi} X_{4r},$$

$$r_{1j} f_j'' + r_{2j}\varphi_j + \int_0^{l_\nu} t_{0j}\varphi_j'\,dz_j + \sum_{\nu=j+1}^{m}\int_0^{l_\nu} t_{0\nu}\varphi_\nu\,dz_\nu + \omega^2\Big[\int_{z_j}^{l_j}(\mathcal{J}_{1j} f_j' + \mathcal{J}_{2j}\varphi_j')dz_j + \sum_{\nu=j+1}^{m}\int_0^{l_j}(\mathcal{J}_{10} f_\nu' + \mathcal{J}_{2\nu}\varphi_\nu')dz_\nu\Big] - \int_{z_j}^{l_j} M_{zj}\,dz_j - \sum_{\nu=j+1}^{m}\int_0^{l_\nu} M_{z\nu}\,dz_\nu + \sum_{r=1}^{R_\xi} X_{7r},$$

$$(\bar{E}\mathcal{J}_y)_j\theta_j' - (\bar{E}S_y)_j e_j' + \int_{z_j}^{l_j} G_j F_j\,dz_j + \sum_{\nu=j+1}^{m}\cos\beta'_{\nu j}\int_0^{l_\nu} G_\nu F_\nu \theta_\nu\,dz_\nu - \int_{z_j}^{l_j} G_j F_j u_j'\,dz_j - \sum_{\nu=j+1}^{m}\cos\beta'_{\nu j}\int_0^{l_\nu} G_\nu F_\nu u_\nu'\,dz_\nu - \omega^2\Big\{\int_{z_j}^{l_j}(q_{2j}\theta_j - q_{1j}e_j)dz_j + \sum_{\nu=j+1}^{m}\Big[\cos\beta'_{\nu j}\int_0^{l_\nu}(q_{2\nu}\theta_\nu - q_{1\nu}e_\nu)dz_\nu + \sin\beta_{\nu j}\int_0^{l_\nu}(q_{1\nu}f_\nu + q_{2\nu}\varphi_\nu)dz_\nu\Big]\Big\} + \sum_{r=1}^{R_\xi}\sum_{\mu=j}^{m_r}(\cos\hat{\beta}_{j\mu}X_{5r} + \sin\hat{\beta}_{j\mu}X_{6r}), \tag{5}$$

$$(\bar{E}F)_j e_j' - (\bar{E}S_y)_j\theta_j' - \omega^2\Big\{\int_{z_j}^{l_j}(q_{0j}e_j - q_{1j}\theta_j)dz_j + \sum_{\nu=j+1}^{m}\Big[\cos\beta'_{j\nu}\int_0^{l_\nu}(q_{0\nu}e_\nu - q_{1\nu}\theta_\nu)dz_\nu - \sin\beta'_{j\nu}\int_0^{l_\nu}(q_{0\nu}f_\nu + q_{1\nu}\varphi_\nu)dz_\nu\Big]\Big\} + \sum_{r=1}^{R_\xi}\sum_{\mu=j}^{m_r}\big[\cos\hat{\beta}_{j\mu}X_{3r} - \sin\hat{\beta}_{j\mu}X_{2r}\big],$$

$$(GF)_j u_j' - (GF)_j\theta_j - \omega^2\Big(\int_{z_j}^{l_j} q_{0j}u_j\,dz_j + \sum_{\nu=j+1}^{m}\int_0^{l_\nu} q_{0\nu}u_\nu\,dz_\nu\Big) + \sum_{r=1}^{R_\xi} X_{1r},$$

где R_ξ – количество замкнутых контуров, в образовании которых участвует ξ -й элемент; m_{τ} - номер узла ξ -го элемента, образованного при раскрытии τ -го замкнутого контура.

Таким образом, колебания статически неопределимой пластинчатой рамы будут описываться системой $5 \times \bar{\bar{m}}$ уравнений ($\bar{\bar{m}}$ - число элементов рамы). Для численного решения полученной системы уравнений используется аппарат интегрирующих матриц [4]. В матричной форме система будет иметь вид:

$$RF - \omega^2 PF - P_x X = 0, \tag{6}$$

где R , P - квазидиагональные матрицы соответственно жесткостных и инерционных коэффициентов рамы порядка

$$(5 \times \sum_{\xi=1}^{\bar{\bar{m}}} N_{\xi}) \times (5 \times \sum_{\xi=1}^{\bar{\bar{m}}} N_{\xi}),$$

$P_x = \begin{bmatrix} P_{x_1} \\ \vdots \\ P_{x\bar{\bar{m}}} \end{bmatrix}$ - блочная матрица коэффициентов при лишних неизвестных порядка $(5 \times \sum_{\xi=1}^{\bar{\bar{m}}} N_{\xi}) \times (7 \times R)$,

$F = \begin{bmatrix} f'' \\ \varphi'' \\ \theta' \\ e' \\ u' \end{bmatrix}$ - столбец искомых функций порядка $5 \times \sum_{\xi=1}^{\bar{\bar{m}}} N_{\xi}$,

$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_R \end{bmatrix}$ - столбец лишних неизвестных порядка $7 \times R$,

$$X_{\tau} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_7 \end{bmatrix},$$

N_{ξ} - число расчетных сечений на ξ -ом элементе,
R - число замкнутых контуров рамы.

При записи уравнения (6) использованы топологические матрицы, подробно рассмотренные в [2]. Для окончательного решения задачи в уравнении (6) необходимо исключить столбец лишних неизвестных. Для этого воспользуемся, как и в [3, 5], условиями совместности деформаций в разрезах, с помощью которых получена основная система. Рассматривая условия совместности, приходим к выражению

$$\omega^2 \Delta F + \delta X = 0$$

или

$$X = -\omega^2 \delta^{-1} \Delta F, \qquad (7)$$

где Δ – матрица порядка $(7\times R)\times(5\times\sum_{\xi=1}^{\bar m} N_\xi)$, δ – матрица порядка $(7\times R)\times(7\times R)$.

С учетом (7) уравнение (6) запишется в виде

$$(\lambda E - U)F = 0,$$

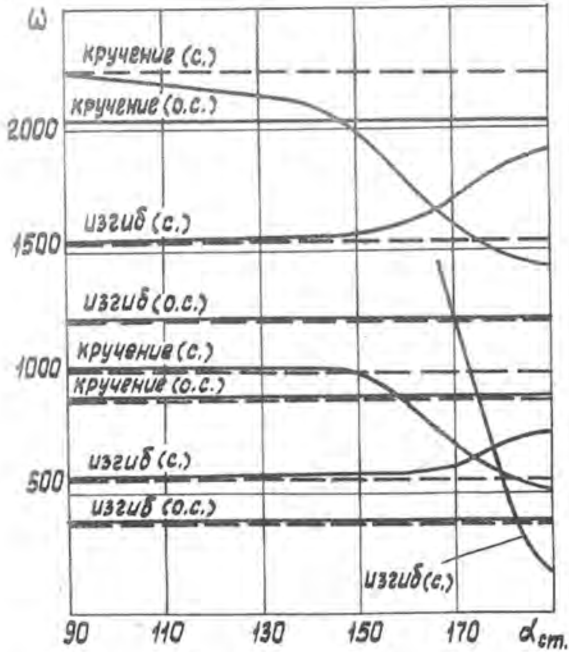
где $U = R_{m}^{-1}(P - P_{x}\,\delta_{\bar m}^{-1}\Delta)$ – динамическая матрица рамы порядка $(5\times\sum_{\xi=1} N_\xi)\times(5\times\sum_{\xi=1} N_\xi)$. E

Таким образом, решение задачи свободных колебаний статически неопределимой пластинчатой рамы сводится к решению проблемы собственных значений и векторов матрицы U.

Рис. 2

Изложенный алгоритм был реализован в виде программы на языке АЛГОЛ-60 на ЭВМ М-222. На примере простой конструкции (рис. 2) при абсолютно жестких стойках с помощью составленной программы исследовалось влияние деформаций пластинчатых участков в своей плоскости и угла стыковки $\alpha_{ст}$ на частоты свободных колебаний.

На рис. 3 приведены результаты расчетов. Как и следовало ожидать, частоты обратно симметричных изгибных и крутильных тонов не зависят от этих факторов. Для симметричных изгибных и крутильных тонов в диапазоне $\alpha_{ст} = 150^\circ - 180^\circ$ наблюдается существенная зависимость частот от исследуемых параметров. Это представляет особый интерес, так как по методу [3, 5], не учитивающему деформаций пластинчатых участков в своей плоскости, частоты колебаний во всем диапазоне изменения $\alpha_{ст}$ не зависят от его величины. Таким образом, полученные результаты подтверждают предположения [I] о существенном влиянии деформаций участков рамы в своей плоскости на частоты колебаний и необходимость их учета.



——— Решение с учетом деформаций в своей плоскости.
— — — Решение без учета деформаций в своей плоскости.

Рис. 3

Литература

I. Вахитов М.Б., Селин И.С., Тинчурин Т.Ф. К уточнению динамической модели элемента пластинчатой рамы. – В кн.: Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сборник, изд. КуАИ, вып. 5, 1979, с. 9-15.

2. Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Снигирев В.Ф. Расчет крыльевых устройств судов на прочность. - Казань: Таткнигоиздат, 1975. - 212 с.

3. Петрушенко Ю.Я. К расчету свободных колебаний элементов пластинчатых рам. - Казань, 1977. - 10 с. - Рукопись представлена Казанским авиационным институтом. Деп. в ВИНИТИ 23 октября 1977, № ВМ.Д 02848.

4. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы - аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики. - ИВУЗ, Авиационная техника, Казань, 1966, № 3, с. 18-27.

5. Вахитов М.Б., Селин И.С., Петрушенко Ю.Я. Метод расчета колебаний крыльевых устройств судов как пластинчатых рам. - Тез. докл. Всесоюзной научно-техн. конф. "Пути повышения прочности улучшения конструкций и технологии постройки судов с динамическими принципами поддержания". - Л., Судостроение, 1975, 160 с.