

обшивке находился двутавр, на первой пластине также двутавр и на третьей пластине подкрепляющим элементом являлся составной профиль.

За счет структурной оптимизации критерий $\bar{V}(\bar{P})$ уменьшился на 12 %, при этом оптимальная структура стала типа $\bar{\tau} = \{4, 5, 9\}$, дальнейшая параметрическая оптимизация функционала $\bar{V}(\bar{x})$ привела к дополнительному уменьшению критерия еще на 21 %. Отметим, что параметрическая оптимизация на постоянной структуре $\bar{\tau} = \{2, 6, 9\}$ снижает критерий $\bar{V}(\bar{x})$ на 18 %.

В заключение заметим, что рассмотренная методика при ряде дополнений, касающихся поэлементного задания вектора $\bar{\tau}$ (т.е. задания не типов профилей, как в рассмотренной задаче, а их элементов и способов их совмещения), может быть распространена на более широкий класс задач структурно-параметрической оптимизации конструкций.

Л и т е р а т у р а

1. Алгоритмы оптимизации проектных решений / Под редакцией А.И.Половинкина. - М.: Энергия, 1976. - 264 с.

2. Чичинадзе В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. - М.: Наука, 1983. - 256 с.

УДК 539.4:534.1

Т.В.Гришанина, Ф.Н.Шклярчук

КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМИ НЕКОНСЕРВАТИВНЫМИ СИЛАМИ

В задачах динамики упругих летательных аппаратов приходится учитывать различные возмущения, возникающие в результате взаимодействия колеблющейся конструкции с другими средами и системами (аэродинамическими силами; кориолисовыми силами относительного движения компонентов жидкого топлива и истекающих газов; реактивными силами тяги двигателей; гироскопическими силами вращающихся роторов; управляющими силами системы стабилизации). Эти силы зависят от параметров движения конструкции и, как правило, являются неконсервативными. К возмущениям можно также отнести силы внутреннего демпфирования и силы, обусловленные изменениями массовых и упругих характеристик базовой расчетной модели конструкции. Во многих случаях указанные выше возмущения можно считать малыми по

равнению с упругими и инерционными силами базовой системы. Тогда для расчета динамических характеристик неконсервативной системы можно применять метод возмущений, используя в качестве опорных решения для базовой консервативной системы. Такой подход использовался для расчета модифицированных систем (при малых изменениях масс и жесткостей) и гидроскопических систем в работах /1/, /2/.

Рассмотрим автономную линейную систему с конечным числом степеней свободы. Предполагая, что возмущающие силы и изменения масс и жесткостей системы малы, запишем уравнения колебаний в виде

$$(M + \varepsilon A) \ddot{q} + \varepsilon D \dot{q} + (K + \varepsilon B) q = 0, \quad (1)$$

где q - вектор обобщенных координат; ε - малый параметр; M, K - симметричные матрицы инерции и жесткости базовой системы; A, D, B - квадратные вещественные матрицы. Однородная система (1) имеет частные решения вида

$$q = z e^{\lambda t}, \quad (2)$$

где z, λ - комплексный вектор и комплексное собственное значение. С учетом (2) уравнение (1) приводится к виду

$$[\lambda^2 (M + \varepsilon A) + \lambda \varepsilon D + (K + \varepsilon B)] z = 0. \quad (3)$$

Решение этого уравнения получим методом возмущений в виде разложений по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned} z &= z^{(0)} + \varepsilon z^{(1)} + \varepsilon^2 z^{(2)} + \dots, \\ \lambda &= \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя разложения (4) в (3) и приравнявая нулю группы членов, содержащих в качестве множителя параметры $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots$, получим:

$$[\lambda^{(0)2} M + K] z^{(0)} = 0, \quad (5)$$

$$[\lambda^{(0)2} M + K] z^{(1)} + [2\lambda^{(0)} \lambda^{(1)} M + \lambda^{(0)2} A + \lambda^{(0)} D + B] z^{(0)} = 0, \quad (6)$$

$$[\lambda^{(0)2} M + K] z^{(2)} + [2\lambda^{(0)} \lambda^{(1)2} M + \lambda^{(0)2} A + \lambda^{(0)} D + B] z^{(1)} +$$

$$+ [(\lambda^{(1)2} + 2\lambda^{(0)} \lambda^{(2)}) M + 2\lambda^{(0)} \lambda^{(1)} A + \lambda^{(1)} D] z^{(0)} = 0, \quad (7)$$

Найдем приближенное решение, близкое к K -ой собственной форме колебаний базовой консервативной системы. Это решение далее

будем обозначать нижним индексом K . Из уравнения (5) в нулевом приближении следует, что

$$\mathbf{z}_K^{(0)} = \mathbf{X}_K, \quad \lambda_K^{(0)} = \pm i \omega_K, \quad (8)$$

где \mathbf{X}_K, ω_K - действительный вектор и частота K -ой формы собственных колебаний базовой системы. Собственные формы колебаний этой системы удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n &= 0, & \mathbf{X}_m^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n &= 0 & \text{при } m \neq n \\ \mathbf{X}_n^T \mathbf{M} \mathbf{X}_n &= m_n, & \mathbf{X}_n^T \mathbf{K} \mathbf{X}_n &= m_n \omega_n^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение для первого приближения ищем в виде

$$\mathbf{z}_K^{(1)} = \sum_{n \neq K} c_{Kn}^{(1)} \mathbf{X}_n. \quad (10)$$

Подставим (8) и (10) в уравнение (6):

$$[\lambda^{(0)2} \mathbf{M} + \mathbf{K}] \sum_{n \neq K} c_{Kn}^{(1)} \mathbf{X}_n + [2\lambda_K^{(0)} \lambda_K^{(1)} \mathbf{M} + \lambda_K^{(0)2} \mathbf{A} + \lambda_K^{(0)} \mathbf{D} + \mathbf{B}] \mathbf{X}_K = 0. \quad (11)$$

Умножая его слева на \mathbf{X}_K^T , получим с учетом (9)

$$2\lambda_K^{(0)} \lambda_K^{(1)} m_K + \lambda_K^{(0)2} a_{KK} + \lambda_K^{(0)} d_{KK} + b_{KK} = 0, \quad (12)$$

где использованы обозначения

$$a_{mn} = \mathbf{X}_m^T \mathbf{A} \mathbf{X}_n, \quad d_{mn} = \mathbf{X}_m^T \mathbf{D} \mathbf{X}_n, \quad b_{mn} = \mathbf{X}_m^T \mathbf{B} \mathbf{X}_n. \quad (13)$$

Из уравнения (12) с учетом (8) получаем

$$\lambda_K^{(1)} = -\frac{d_{KK}}{2m_K} \pm i \frac{b_{KK} - \omega_K^2 a_{KK}}{2\omega_K m_K}. \quad (14)$$

Умножая уравнение (11) слева на \mathbf{X}_m^T при $m \neq K$, получим с учетом (9)

$$(\lambda_K^{(0)2} + \omega_m^2) m_m c_{Km}^{(1)} + \lambda_K^{(0)2} a_{mK} + \lambda_K^{(0)} d_{mK} + b_{mK} = 0,$$

откуда

$$c_{Km}^{(1)} = -\frac{b_{mK} - \omega_K^2 a_{mK}}{m_m (\omega_m^2 - \omega_K^2)} \mp i \frac{\omega_K d_{mK}}{m_m (\omega_m^2 - \omega_K^2)}. \quad (15)$$

Для второго приближения полагаем

$$\mathbf{z}_K^{(2)} = \sum_{n \neq K} c_{Kn}^{(2)} \mathbf{X}_n. \quad (16)$$

Подставим выражения (8), (10), (16) в уравнение (7):

$$\sum_{n \neq k} [c_{kn}^{(2)} (\lambda_k^{(0)2} M + K) + c_{kn}^{(1)} (2\lambda_k^{(0)} \lambda_k^{(1)} M + \lambda_k^{(0)2} A + \lambda_k^{(0)} D + B)] X_n +$$

$$+ [(\lambda_k^{(1)2} + 2\lambda_k^{(0)} \lambda_k^{(2)}) M + 2\lambda_k^{(0)} \lambda_k^{(1)} A + \lambda_k^{(1)} D] X_k = 0. \quad (I7)$$

Умножая это уравнение слева на X_k^T , получим

$$\sum_{n \neq k} c_{kn}^{(1)} (\lambda_k^{(0)2} a_{kn} + \lambda_k^{(0)} d_{kn} + b_{kn}) +$$

$$+ (\lambda_k^{(1)2} + 2\lambda_k^{(0)} \lambda_k^{(2)}) m_k + 2\lambda_k^{(0)} \lambda_k^{(1)} a_{kk} + \lambda_k^{(1)} d_{kk} = 0,$$

откуда с учетом (8), (I4), (I5) находим

$$\lambda_k^{(2)} = \frac{a_{kk} d_{kk}}{2m_k^2} + \sum_{n \neq k} \frac{d_{kn} (b_{nk} - \omega_k^2 a_{nk}) + d_{nk} (b_{kn} - \omega_k^2 a_{kn})}{2m_k^2 (\omega_n^2 - \omega_k^2)} +$$

$$+ \frac{1}{m_k^2 \omega_k} \left[\frac{d_{kk}^2}{4} + \frac{(b_{kk} - \omega_k^2 a_{kk})(b_{kk} + 3\omega_k^2 a_{kk})}{4\omega_k^2} + \right. \quad (I8)$$

$$\left. + \sum_{n \neq k} \frac{(b_{kn} - \omega_k^2 a_{kn})(b_{nk} - \omega_k^2 a_{nk}) - \omega_k^2 d_{kn} d_{nk}}{\omega_n^2 - \omega_k^2} \right].$$

Умножим уравнение (I7) слева на X_m^T при $m \neq k$. Получим

$$(\lambda_k^{(0)2} + \omega_m^2) m_m c_{km}^{(2)} + 2\lambda_k^{(0)} \lambda_k^{(1)} a_{mk} + \lambda_k^{(1)} d_{mk} +$$

$$+ \sum_{n \neq k} c_{kn}^{(1)} (2\lambda_k^{(0)} \lambda_k^{(1)} m_m \delta_{mn} + \lambda_k^{(0)2} a_{mn} + \lambda_k^{(0)} d_{mn} + b_{mn}) = 0,$$

где $\delta_{mn} = 0$ при $n \neq m$ и $\delta_{mn} = 1$ при $n = m$. Из последнего уравнения с учетом (8), (I4) и (I5) находим

$$c_{km}^{(2)} = \frac{(\omega_m^2 + \omega_k^2) d_{mk} d_{kk}}{2m_m m_k (\omega_m^2 - \omega_k^2)^2} - \frac{(b_{mk} - \omega_m^2 a_{mk})(b_{kk} - \omega_k^2 a_{kk})}{m_m m_k (\omega_m^2 - \omega_k^2)^2} +$$

$$+ \frac{1}{m_m (\omega_m^2 - \omega_k^2)} \sum_{n \neq k} \frac{(b_{nk} - \omega_k^2 a_{nk})(b_{mn} - \omega_k^2 a_{mn}) - \omega_k^2 d_{nk} d_{mn}}{m_n (\omega_n^2 - \omega_k^2)} +$$

$$+ \omega_k \left[\frac{a_{kk} (b_{mk} - \omega_m^2 a_{mk})}{m_m m_k (\omega_m^2 - \omega_k^2)^2} + \frac{(\omega_m^2 + \omega_n^2)(b_{kk} - \omega_k^2 a_{kk}) d_{mk}}{2m_m m_k \omega_k^2 (\omega_m^2 - \omega_k^2)^2} - \right. \quad (I9)$$

$$\left. - \frac{1}{m_m (\omega_m^2 - \omega_k^2)} \sum_{n \neq k} \frac{(b_{nk} - \omega_k^2 a_{nk}) d_{mn} + d_{nk} (b_{mn} - \omega_k^2 a_{mn})}{m_n (\omega_n^2 - \omega_k^2)} \right].$$

Ограничимся вторым приближением. Согласно способу выделения в уравнении (I) малого параметра ε и структуре полученного решения в форме (4) с учетом (8)-(I9) оно не зависит от величины ε , и поэтому для удобства можно положить $\varepsilon = 1$. Найденные собственные

значения λ_k и собственные векторы \bar{x}_k неконсервативной системы являются попарно комплексно сопряженными. Полученные формулы позволяют легко проанализировать влияние на них как по отдельности, так и в комбинациях различных возмущающих сил: а) инерционных ($A^T = A$); б) диссипативных ($D^T = D$); в) гироскопических ($D^T = -D$); г) потенциальных ($B^T = B$); д) циркуляционных ($B^T = -B$).

Для оценки точности метода возмущений сначала рассмотрим известную неконсервативную задачу о колебаниях консольной балки постоянного сечения, нагруженной на конце следящей сжимающей силой $P/3$. Перемещение балки описывается двумя низшими формами собственных колебаний при $P = 0$. Критическое значение P , вычисленное на основании этой двухстепенной модели, равно $P_{кр} = 20,08 EI/l^2$. При $P < P_{кр}$ собственные значения данной неконсервативной системы являются чисто мнимыми ($\lambda_k = \pm i\beta_k$), собственные формы колебаний - действительными. На рис. I сплошными линиями показаны точные значения β_1/ω_1 и β_2/ω_1 , где $\omega_1 = 12,36\sqrt{EI/ml^4}$, а пунктирными линиями - значения, полученные по методу возмущений во втором приближении.

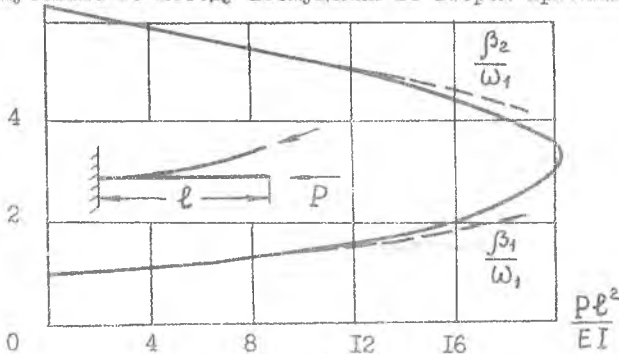


Рис. I

В качестве второго примера рассмотрим колебания абсолютно жесткого стабилизатора, который может поворачиваться относительно оси за счет упругости проводки управления и относительно оси x - за счет упругости узла крепления, рис.2. Уравнения колебаний тонкого монолитного стабилизатора в сверхзвуковом потоке [4] для случая треугольной в плане формы с углом стреловидности χ по передней кромке и с ромбовидным поперечным сечением (рис.2) приводятся к

$$\begin{aligned} &\text{виду} \\ &\ddot{q}_1 - \sigma \ddot{q}_2 + \alpha \dot{q}_1 - \sigma \alpha \dot{q}_2 + (\omega_{11}^2 + M\gamma) q_1 = 0 \\ &-\sigma \ddot{q}_1 + 2\sigma^2 \ddot{q}_2 - \sigma \alpha \dot{q}_1 + 2\sigma^2 \alpha \dot{q}_2 - 2\sigma M\gamma q_1 + \omega_{22}^2 q_2 = 0, \end{aligned}$$

где $\zeta = l/b_0$; $\alpha = 10\rho a_\infty / \bar{c}\rho_0 b$; $\gamma = 20\rho a_\infty^2 / \bar{c}\rho_0 b_0^2$;
 ρ , ρ_0 - плотности невозмущенного потока и материала стабилизатора;
 \bar{c} - относительная толщина профиля; ω_H , ω_{22} - парциальные частоты крутильных и изгибных колебаний соответственно. Примем следующие параметры: $\zeta = 1$, $\omega_H = 203 \text{ сек}^{-1}$, $\omega_{22} = 2,64 \omega_H$, $\alpha = 0,108 \omega_H$, $\gamma = 0,371 \omega_H^2$. При этом собственные частоты колебаний стабилизатора в пустоте равны $\omega_1 = 188 \text{ сек}^{-1}$ и $\omega_2 = 579 \text{ сек}^{-1}$.

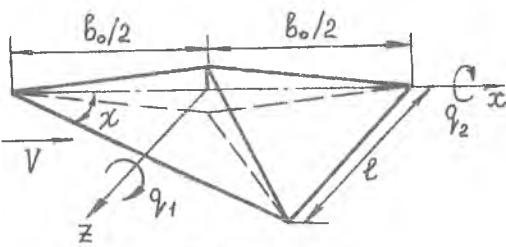


Рис. 2

Таблица

$M/M_{\text{фл}}$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
β_1 , точн.	283	282	301	321	344
β_1 , пригл.	259	274	288	301	312
β_2 , точн.	549	539	529	517	502
β_2 , пригл.	550	542	533	524	515

Критическое значение числа Маха и частота колебаний, при которых возникает флаттер, равны $M_{\text{фл}} = 5,12$ и $\omega_{\text{фл}} = 431 \text{ сек}^{-1}$. В таблице сравниваются мнимые части собственных значений $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ при докритических числах Маха, полученные на основании точного решения, и решения по методу возмущений во втором приближении. В рассмотренном здесь диапазоне чисел Маха действительные части обоих корней α_k ($k = 1, 2$) равны значению $-10,9$, которое получается на основании как точного, так и приближенного решений.

Л и т е р а т у р а

1. Болдуин Дж.Ф., Хаттон С.Г. Собственные формы колебаний модифицированных конструкций // Аэрокосмическая техника. - 1986. - № 4. - С. 236.
2. Meirovitch L., Ryland G. Response of slightly damped gyroscopic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1979, v. 67, pp. 1-19.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. - М.: Физматгиз, 1961. - 340 с.
4. Шклярчук Ф.Н. Колебания и вязкоупругость летательных аппаратов. - М.: МАИ, 1981. - 89 с.