ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 4, 1978

УДК 629.76.001.24-019

Э.И.Миноранский

К ВОПРОСУ О ВЫБРОСАХ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Согласно общей теории задачи по оценке надежности элементов конструкций при случайном нагружении решаются путем анализа выбросов нагрузкой некоторого опасного уровня [1]. В летательном аппарате большое число элементов конструкции работает в условиях сложно-напряженного состояния. Опасным в этом случае оказывается не уровень, а некоторая область Ω_0 . В работе [1] определяются лишь оценки для выбросов за пределы некоторой области, а в [2, 3, 4] находятся выбросы стационарного случайного процесса. В данной же работе рассматривается вопрос о выбросах для случая, когда граница допустимой области с течением времени значительно изменяется (износ, старение элемента).

Для вектора $V(t)$ с компонентами $\sigma(t)$ и $\tau(\tau)$, следуя работе [1], запишем

$$\nu_{+}(\Gamma,t)=\int\limits_{\Gamma} d\Gamma \int\limits_{\dot{V}_n>0} f(V_\Gamma,\dot{V},t)\,\dot{V}_n\,dV. \qquad (1)$$

Здесь $\nu_{+}(\Gamma,t)$ – математическое ожидание числа положительных пересечений траекторией вектора $V(t)$ границы Γ допустимой области Ω_0 ; $f(V,\dot{V},t)$ – функция плотности вероятности; $\dot{V}_n$ – нормальная составляющая $\dot{V}(t)$; V_Γ значения вектора V на границе Γ.

Граница Γ является случайной, а вследствие изменения прочностных характеристик материала конструкции и нестационарной.

Согласно [1] формулу (1) можно распространить и на кусочно-гладкие поверхности, полагая, что для достаточно перемешанных случайных процессов вероятность пересечения границы Γ через ребра будет пренебрежимо малой.

Воспользовавшись представлением границы Γ при помощи серий отрезков, найдем полное решение путем простого суммирования вкладов от пересечений отдельных отрезков:

$$\nu_+(\Gamma, t) = \sum_{K=1}^{n} \nu_+^K(\Gamma_K, t), \tag{2}$$

где $\nu_+^K(\Gamma_K, t)$ – среднее число выбросов за K -тый отрезок длиной ds_K ; n – число прямых отрезков, которыми аппроксимируется граница Γ .

Запишем $\nu_+^K(\Gamma_K, t)$ с помощью выражения (I):

$$\nu_+^K(\Gamma_K, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |v_n|_K f(\sigma, \tau; \dot\sigma, \dot\tau; t)\, d\dot\sigma\, d\dot\tau\, ds_K . \tag{3}$$

Преобразуем (3) к удобному виду, введя новые переменные x и y так, чтобы направление оси x совпадало с направлением отрезка кривой Γ (рис. I):

$$x = \sigma\cos\theta + \tau\sin\theta,$$
$$y = -\sigma\sin\theta + \tau\cos\theta. \tag{4}$$

Положительное направление θ – против часовой стрелки.

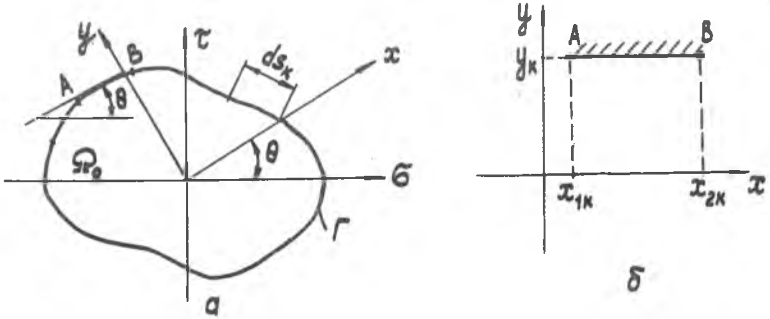

Рис. I

С учетом (4) выражение (3) примет вид

$$\nu_+^K(\Gamma_K, t) = \int_{x_{1K}}^{x_{2K}} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\dot x \int_{0}^{\infty} f(x, y_K; \dot x, \dot y; t)\, \dot y\, d\dot y . \tag{5}$$

Составляющие $\sigma(t)$ и $\tau(t)$ вектора $V(t)$ будем считать стационарными с законами распределения, отличными от нормального.

Уровень y_κ у нас случайный и нестационарный, его можно аппроксимировать полиномом

$$y_\kappa = y_\kappa^\circ - a_1 t - a_2 t^2 - \ldots - a_n t^n, \tag{6}$$

в котором коэффициенты a_i являются нормально распределенными величинами с математическими ожиданиями $\langle a_i \rangle$ и среднеквадратическими отклонениями S_{a_i}, а y_κ° – уровень в начальный момент времени.

Введем новую случайную функцию $z(t)$ [5]:

$$z(t) = y(t) - y_\kappa(t) = y(t) - y_\kappa^\circ + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n.$$

Тогда вместо того, чтобы рассматривать выбросы стационарного случайного вектора с составляющими x и y за нестационарный уровень y_κ, можно определять выбросы случайного нестационарного вектора с компонентами x, z за нулевой уровень. Заметим, что математическое ожидание $\langle z(t) \rangle$ должно располагаться ниже нулевого значения настолько, чтобы выбросы за нуль представляли собой редкие события, как правило, не корреллированные друг с другом.

Для удобства введем обозначения $\dot{x} = \alpha$, $\dot{z} = \beta$ и перепишем (5) в виде

$$\nu_+^\kappa(\Gamma_\kappa, t) = \int_{x_{1\kappa}}^{x_{2\kappa}} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^{\infty} f(x, 0; \alpha, \beta; t)\beta \, d\beta. \tag{7}$$

Учтем, что процесс $x(t)$ – стационарный, а $z(t)$ и $\beta(t)$, следуя [5], можно считать некоррелированными. Тогда

$$f(x, z; \alpha, \beta; t) = f(x, z) f(\alpha, \beta)$$

и для выражения (7) с учетом условия согласованности получим

$$\nu_+^\kappa(\Gamma_\kappa, t) = \int_{x_{1\kappa}}^{x_{2\kappa}} f(x, 0)\, dx \int_0^{\infty} \beta f(\beta)\, d\beta. \tag{8}$$

Законы распределения $f(\sigma, \tau)$, а значит и $f(x, y)$ произвольные. Это значительно усложняет определение числа выбросов. Учитывая простоту преобразований при нормальном законе распределения, разложим $f(x, z)$ на нормально распределенные составляющие. Следуя [6], одномерные законы $f(\sigma)$, $f(\tau)$ выразим через взвешенные суммы

r, s нормальных распределений $f_i(\sigma)$, $f_j(\tau)$:

$$f(\sigma)=\sum_{i=1}^{r} P_i f_i(\sigma), \qquad f(\tau)=\sum_{j=1}^{s} P_j f_j(\tau). \tag{9}$$

Здесь P_i, P_j – вероятности того, что имеют место распределение $f_i(\sigma)$, $f_j(\tau)$ со средними значениями m_{σ_i}, m_{τ_j} и дисперсиями $S^2_{\sigma_i}$, $S^2_{\tau_j}$.

С учетом (9) и (4) запишем

$$f(x)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} P_{ij} f_{ij}(x), \qquad f(y)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} P_{ij} f_{ij}(y), \tag{10}$$

где $P_{ij}=P_i P_j$.

Окончательно закон распределения $f(x,y)$ примет вид

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} P_{ij} f_{ij}(x,y), \tag{11}$$

где нормальная плотность вероятности $f_{ij}(x,y)$ характеризуется средними $m_{x_{ij}}$, $m_{y_{ij}}$, дисперсиями $\bar{S}^2_{x_{i,j}}$, $\bar{S}^2_{y_{i,j}}$ и коэффициентом корреляции r_{ij}.

Для коэффициента корреляции с учетом (4) получим выражение

$$r_{ij}=\frac{\rho_{ij}\bar{S}_{\sigma_i}\bar{S}_{\tau_j}\cos 2\theta-\frac{1}{2}(\bar{S}^2_{\sigma_i}-\bar{S}^2_{\tau_j})\sin 2\theta}{\bar{S}_{x_{ij}}\bar{S}_{y_{ij}}}.$$

Окончательное выражение для определения среднего числа выбросов за K-тый отрезок примет вид

$$\nu_+^K(r_K,t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} P_{ij} V_{ij}^K W_{ij}^K. \tag{12}$$

Здесь

$$V_{ij}^K=\frac{1}{2\pi(\bar{S}_{z_{ij}})_K}\exp\left[-\frac{(m_{z_{ij}})_K^2}{2(\bar{S}^2_{z_{ij}})_K}\right]\left[\Phi(u_{2K})_{ij}-\Phi(u_{1K})_{ij}\right]$$

$$(u_{\xi K})_{ij}=\frac{1}{\sqrt{1-(r_{ij})_K^2}}\left[\frac{x_{\xi K}-(m_{x_{ij}})_K}{(\bar{S}_{x_{ij}})_K}+(r_{ij})_K\frac{(m_{z_{ij}})_K}{(\bar{S}_{z_{ij}})_K}\right]$$

$$(\xi=1,2)$$

$$W_{ij}^K=\frac{(\bar{S}_{\beta_{ij}})_K}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{m_\beta^2}{2(\bar{S}^2_{\beta_{ij}})_K}\right]+m_\beta\Phi\left[\frac{m_\beta}{(\bar{S}_{\beta_{ij}})_K}\right]$$

$$\Phi(\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\gamma} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$ – функция Лапласа.

$$x_\kappa = \sigma_\kappa \cos\theta_\kappa + \tau_\kappa \sin\theta_\kappa$$

$$y_\kappa = -\sigma_\kappa \sin\theta_\kappa + \tau_\kappa \cos\theta_\kappa$$

$$(m_{x_{ij}})_\kappa = m_{\sigma_i}\cos\theta_\kappa + m_{\tau_j}\sin\theta_\kappa$$

$$(m_{y_{ij}})_\kappa = m_{\tau_j}\cos\theta_\kappa - m_{\sigma_i}\sin\theta_\kappa$$

$$(\bar{s}^2_{x_{ij}})_\kappa = \bar{s}^2_{\sigma_i}\cos^2\theta_\kappa + \bar{s}^2_{\tau_j}\sin^2\theta_\kappa$$

$$(\bar{s}^2_{y_{ij}})_\kappa = \bar{s}^2_{\sigma_i}\sin^2\theta_\kappa + \bar{s}^2_{\tau_j}\cos^2\theta_\kappa$$

$$z_\kappa = y_\kappa - y^\circ_\kappa + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

$$(m_{z_{ij}})_\kappa = (m_{y_{ij}})_\kappa - m_{y^\circ_\kappa} + m_{a_1} t + m_{a_2} t^2 + \ldots + m_{a_n} t^n$$

$$(\bar{s}^2_{z_{ij}})_\kappa = (\bar{s}^2_{y_{ij}})_\kappa + \bar{s}^2_{y^\circ_\kappa} + \bar{s}^2_{a_1} t^2 + \ldots + \bar{s}^2_{a_n} (t^n)^2$$

$$m_\beta = m_{a_1} + 2m_{a_2} t + \ldots + n m_{a_n} t^{n-1}$$

$$(\bar{s}^2_{\beta_{ij}})_\kappa = (\bar{s}^2_{y_{ij}})_\kappa + \bar{s}^2_{a_1} + 4\bar{s}^2_{a_2} t^2 + \ldots + (n^2)\bar{s}^2_{a_n} (t^{n-1})^2$$

$$(r_{ij})_\kappa = \frac{\rho_{ij}\,\bar{s}_{\sigma_i}\,\bar{s}_{\tau_j}\cos 2\theta_\kappa - \frac{1}{2}(\bar{s}^2_{\sigma_i} - \bar{s}^2_{\tau_j})\sin 2\theta_\kappa}{(\bar{s}_{x_{ij}})_\kappa\,(\bar{s}_{y_{ij}})_\kappa}$$

$i = 1, 2, \ldots, r$

$j = 1, 2, \ldots, s$.

Входящие сюда величины m_{σ_i}, m_{τ_j}, $\bar{S}^2_{\sigma_i}$, $\bar{S}^2_{\tau_j}$, ρ_{ij} известны. Среднее число выбросов за границу допустимой области определяется формулой (2).

Литература

I. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей в расчетах сооружений. М., Стройиздат, I97I.

2. J.C. Houbolt. Exceedances of structural Interaction Boundarieis for Randon Excitation AIAA Journal, vol. 6, N 11, 1968.

3. Федоров Д.И., Бондарович Б.А., Перепонов В.И. Надежность металлоконструкций землеройных машин. М., "Машиностроение", I97I.

4. J.R. Fuller. Stregth margings for Combined Random Stresses Aircraft, vol 3, N 2, 1966.

5. Гусев А.С. К теории надежности стареющих элементов. - В сб.: Проблемы надежности в строительной механике. Изд. РИНТИП, Вильнюс, I968.

6. Инуду К.А. Оптимизация устройств автоматики по критерию надежности. "Энергия", I966.