

УДК 539.3:534.1

М.Б.Вахитов, И.С.Селин,
Т.Ф.Тинчури

К УТОЧНЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕМЕНТА
ПЛАСТИНЧАТОЙ РАМЫ

В авиационных и судовых конструкциях применяются разнообразные варианты несущих систем, представляющих собой сложные многократно статически неопределимые рамы, состоящие из пластинчатых элементов, состыкованных между собой под произвольными углами. В монографии [1] разработан инженерный метод решения задачи статической прочности таких систем. В работах [2, 3] в более простой постановке^{*} он развит применительно к задаче свободных колебаний. Принятые в них деформационные гипотезы для рассматриваемого класса конструкций с их малым удлинением пластинчатых элементов могут привести к потере некоторых тонов колебаний даже в низшей части определяемого спектра. В связи с этим здесь предлагается дальнейшее развитие работ [2, 3] — решение задачи колебаний пластинчатых рам с учетом деформаций элементов в своей плоскости. Рассмотрим деформацию типового элемента пластинчатой рамы (рис. 1).

Прогиб срединной поверхности элемента представим, как и в [1], в виде

$$\tilde{w}_j(x, z, t) = \tilde{f}_j(z, t) + \alpha_j \tilde{\varphi}_j(z, t), \quad (1)$$

^{*}В [2, 3] пластинчатые элементы рамы в своей плоскости полагаются абсолютно жесткими.

где $\tilde{f}_j(z, t)$ - прогиб точек срединной поверхности элемента, лежащих на оси $O_j z_j$ *); $\tilde{\varphi}_j(z, t)$ - угол поворота сечения относительно оси $O_j z_j$.

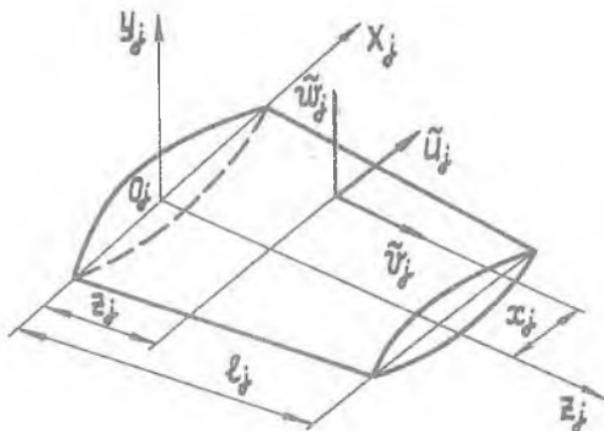


Рис. I

В отличие от [I] перемещения точек срединной поверхности в направлении осей $O_j x_j$ и $O_j z_j$ представим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_j(z, t) &= \tilde{u}_j(z, t), \\ \tilde{v}_j(x, z, t) &= \tilde{e}_j(z, t) - x_j \tilde{\theta}_j(z, t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tilde{u}_j(z, t)$ - перемещения точек срединной поверхности в направлении оси $O_j x_j$; $\tilde{e}_j(z, t)$ - перемещения точек срединной поверхности, лежащих на оси $O_j z_j$, вдоль нее; $\tilde{\theta}_j(z, t)$ - угол поворота сечения относительно оси $O_j y_j$ от изгиба элемента своей плоскости.

Угол наклона касательной к изогнутой в плоскости $x_j O_j z_j$ оси $O_j z_j$ складывается из изгибной - $\tilde{\theta}_j$ и сдвиговой - $\tilde{\psi}_j$ угловых деформаций:

$$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial z_j} = \tilde{\theta}_j + \tilde{\psi}_j. \quad (3)$$

*) Знак \sim над обозначением функции означает ее зависимость времени t .

Выражения (2) и (3) представляют собой распространенную интерпретацию модели балки по Тимошенко. Используя соотношения теории пластин, с учетом (1), (2), получим компоненты деформаций:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{z_j} &= \tilde{e}'_j - x_j \tilde{\theta}'_j - y_j (\tilde{f}_j'' + x_j \tilde{\varphi}_j''), \\ \tilde{\varepsilon}_{x_j} &= 0, \quad \tilde{\gamma}_{x z_j} = \tilde{u}'_j - \tilde{\theta}_j - 2y_j \tilde{\varphi}'_j,\end{aligned}$$

из закона Гука - напряжения:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{z_j} &= \frac{E_j}{1-\mu_j^2} [\tilde{e}'_j - x_j \tilde{\theta}'_j - y_j (\tilde{f}_j'' + x_j \tilde{\varphi}_j'')], \\ \tilde{\sigma}_{x_j} &= \mu_j \tilde{\sigma}_{z_j}, \quad \tilde{\tau}_{x z_j} = \frac{E_j}{2(1+\mu_j)} (\tilde{u}'_j - \tilde{\theta}_j - 2y_j \tilde{\varphi}'_j).\end{aligned}$$

Вариационный принцип Остроградского-Гамильтона

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta U + \delta A) dt = 0,$$

где δK - вариация кинетической энергии элемента; δU - вариация потенциальной энергии; δA - вариация работы внешних сил. С учетом произвольности возможных перемещений приводит к системе пяти дифференциальных уравнений колебаний типового элемента пластинчатой рамы:

$$\begin{aligned}(z_{0j} \tilde{f}_j'' + z_{1j} \tilde{\varphi}_j'')' - (m_{0j} \tilde{f}_j' + m_{1j} \tilde{\varphi}_j')' + (q_{0j} \tilde{f}_j' + q_{1j} \tilde{\varphi}_j) &= 0, \\ (z_{1j} \tilde{f}_j'' + z_{2j} \tilde{\varphi}_j'')' - t_{0j} \tilde{\varphi}_j' - (m_{1j} \tilde{f}_j' + m_{2j} \tilde{\varphi}_j')' + (q_{1j} \tilde{f}_j' + q_{2j} \tilde{\varphi}_j + m_{0j} \tilde{\varphi}_j) &= 0, \\ \bar{E}_j J_{y_j} \tilde{\theta}'_j - \bar{E}_j S_{y_j} \tilde{e}'_j - (G_j F_j \tilde{\theta}_j - G_j F_j \tilde{u}'_j) - (q_{2j} \tilde{\theta}_j - q_{1j} \tilde{e}_j) &= 0, \\ \bar{E}_j F_j \tilde{e}'_j - \bar{E}_j S_{y_j} \tilde{\theta}'_j - (q_{0j} \tilde{e}_j - q_{1j} \tilde{\theta}_j) &= 0, \\ G_j F_j \tilde{u}'_j - G_j F_j \tilde{\theta}_j - q_{0j} \tilde{u}_j &= 0,\end{aligned} \quad (4)$$

где t_{0j} , z_{kj} - жесткостные характеристики элемента в сечении с координатой z_j ; q_{kj} , m_{kj} - инерционные характеристики элемента в этом же сечении ($k = 0, 1, 2$); F_j , S_{y_j} , J_{y_j} - площадь и моменты инерции поперечного сечения относительно оси $O_j y_j$,

$$\bar{E}_j = \frac{E_j}{1-\mu_j^2}, \quad G_j = \frac{E_j}{2(1+\mu_j)},$$

и естественным силовым краевым условиям на торцах $\bar{z}_j = 0, \bar{z}_j = \ell_j^*$:

$$\begin{aligned} &[(\tau_{0j} \tilde{f}_j'' + \tau_{1j} \tilde{\varphi}_j'')]' - (m_{0j} \tilde{f}_j' + m_{1j} \tilde{\varphi}_j') \Big|_{\bar{z} = \ell_j^{(0)}} = -\tilde{Q}_{y_j}^{*(0)}, \\ &[(\tau_{0j} \tilde{f}_j'' + \tau_{1j} \tilde{\varphi}_j'')] \Big|_{\bar{z} = \ell_j^{(0)}} = M_{x_j}^{*(0)}, \quad [(\tau_{1j} \tilde{f}_j'' + \tau_{2j} \tilde{\varphi}_j'')] \Big|_{\bar{z} = \ell_j^{(0)}} = \tilde{M}_{z_j}^{*(0)}, \\ &[(\tau_{1j} \tilde{f}_j'' + \tau_{2j} \varphi_j'')]' - t_{0j} \varphi_j' - (m_{1j} \tilde{f}_j' + m_{2j} \tilde{\varphi}_j') \Big|_{\bar{z} = \ell_j^{(0)}} = M_{z_j}^{*(0)}, \quad (5) \\ &[(\bar{E}_j \mathcal{J}_{y_j} \Theta_j' - \bar{E}_j S_{y_j} \tilde{e}_j')] \Big|_{\bar{z} = \ell_j^{(0)}} = \tilde{M}_{y_j}^{*(0)}, \\ &[\bar{E}_j F_j \tilde{e}_j' - \bar{E}_j S_{y_j} \tilde{\theta}_j'] \Big|_{\bar{z} = \ell_j^{(0)}} = \tilde{Q}_{z_j}^{*(0)}, \\ &[G_j F_j \tilde{u}_j' - G_j F_j \tilde{\theta}_j'] \Big|_{\bar{z} = \ell_j^{(0)}} = \tilde{Q}_{x_j}^{*(0)}. \end{aligned}$$

Однако из полученных 14 краевых условий 6 условий на торце $\bar{z}_j = 0$ являются следствием аналогичных условий на торце $\bar{z}_j = \ell_j$ и их можно отбросить. В результате на торце $\bar{z}_j = 0$ остается одно условие:

$$(\tau_{1j} \tilde{f}_j'' + \tau_{2j} \tilde{\varphi}_j'') \Big|_{\bar{z} = 0} = \tilde{M}_{z_j}^0.$$

Как и в [I], отброшенные силовые краевые условия заменяются геометрическими, задающими жесткие перемещения элемента в пространстве. В данном случае таковыми являются:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j(0) = \tilde{f}_j^0, \quad \tilde{f}_j'(0) = \tilde{f}_j^{10}, \quad \tilde{\varphi}_j(0) = \tilde{\varphi}_j^0, \quad \tilde{\theta}_j(0) = \tilde{\theta}_j^0, \\ \tilde{e}_j(0) = \tilde{e}_j^0, \quad \tilde{u}_j(0) = \tilde{u}_j^0. \end{aligned}$$

Интегрируя первые два уравнения системы (4) дважды, а остальные один раз от \bar{z}_j до ℓ_j с учетом силовых краевых условий (5) и разделяя переменные по методу Фурье, получим систему интегродифференциальных уравнений задачи:

$$\begin{aligned} &\tau_{0j} \tilde{f}_j'' + \tau_{1j} \varphi_j'' - \omega_j^2 \left[\int_{\bar{z}_j}^{\ell_j} \int_{\bar{z}_j}^{\ell_j} (q_{0j} \tilde{f}_j + q_{1j} \varphi_j) d\bar{z}_j d\bar{z}_j + \int_{\bar{z}_j}^{\ell_j} (m_{0j} \tilde{f}_j' + m_{1j} \varphi_j') d\bar{z}_j \right. \\ &\left. - \int_{\bar{z}_j}^{\ell_j} Q_{y_j}^* d\bar{z}_j - M_{x_j}^* \right] = 0, \end{aligned}$$

) Индексы (0), () соответствуют значениям величин при $\bar{z}_j = 0$, $\bar{z}_j = \ell_j$ соответственно.

$$\begin{aligned}
 & \omega_j^2 f_j'' + z_{2j} \varphi_j'' + \int_{z_j}^{z_j'} z_{0j} \varphi_j' dz_j - \omega_j^2 \left[\int_{z_j}^{z_j'} \int_{z_j}^{z_j'} (q_{1j} f_j + q_{2j} \varphi_j + m_{0j} \varphi_j) dz_j dz_j + \right. \\
 & \left. + \int_{z_j}^{z_j'} (m_{1j} f_j' + m_{2j} \varphi_j') dz_j - \int_{z_j}^{z_j'} M_{z_j}^* dz_j - m_{z_j}^* \right] = 0, \quad (6) \\
 & E_j \gamma_{y_j} \theta_j' - \bar{E}_j S_{y_j} \bar{e}_j + \int_{z_j}^{z_j'} G_j F_j \theta_j dz_j - \int_{z_j}^{z_j'} G_j F_j U_j' dz_j - \omega_j^2 \int_{z_j}^{z_j'} (q_{2j} \theta_j - \\
 & - q_{1j} e_j) dz_j - M_{y_j}^* = 0, \\
 & \bar{E}_j F_j e_j' - E_j' S_{y_j} \theta_j' - \omega_j^2 \int_{z_j}^{z_j'} (q_{0j} e_j - q_{1j} \theta_j) dz_j - Q_{z_j}^* = 0, \\
 & G_j F_j U_j' - G_j F_j \theta_j - \omega_j^2 \int_{z_j}^{z_j'} q_{0j} U_j dz_j - Q_{x_j}^* = 0.
 \end{aligned}$$

Применение численного метода интегрирующих матриц М.Б.Вахитова к решению полученной системы позволяет свести последнюю к матричному уравнению, которое в конечном итоге приводится к удобному для вычислений виду:

$$(\bar{\omega} E - U) F = 0,$$

где U - динамическая матрица пластинчатого элемента; $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega^2}$ - обратные собственные значения; F - собственный вектор, характеризующий форму колебаний пластинчатого элемента; E - единичная матрица.

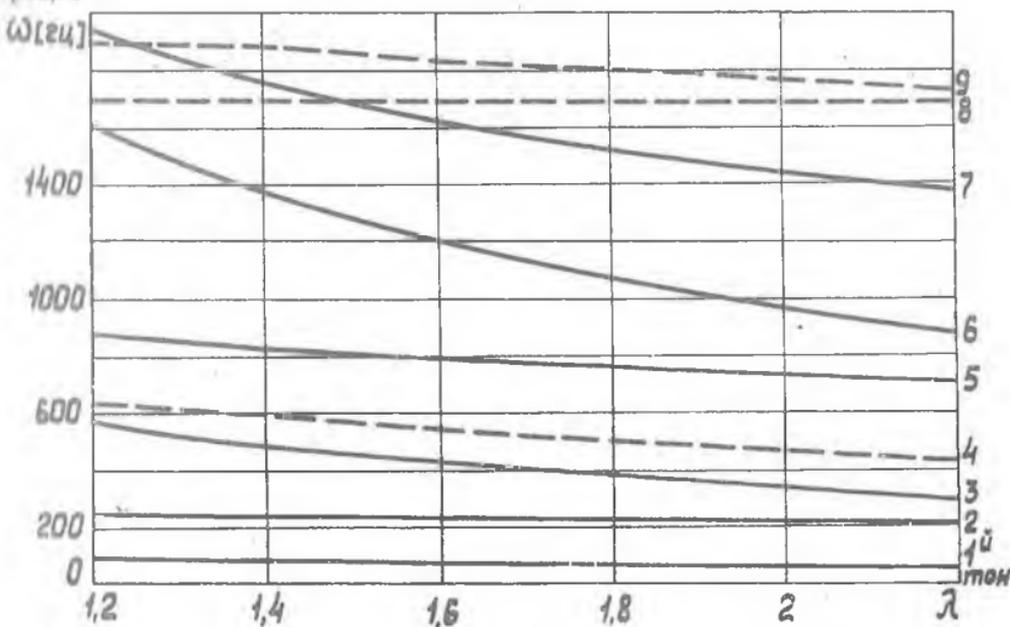


Рис. 2

Таким образом, решение задачи - определение частот и форм собственных колебаний - сводится к отысканию собственных значений $\bar{\omega}$ и соответствующих им собственных векторов F динамической матрицы U .

По предлагаемой методике была проведена серия расчетов ЭВМ с целью выявления влияния геометрических параметров элемента на взаимное расположение тонов изгибно-крутильных колебаний, связанных с деформацией элемента в своей плоскости.

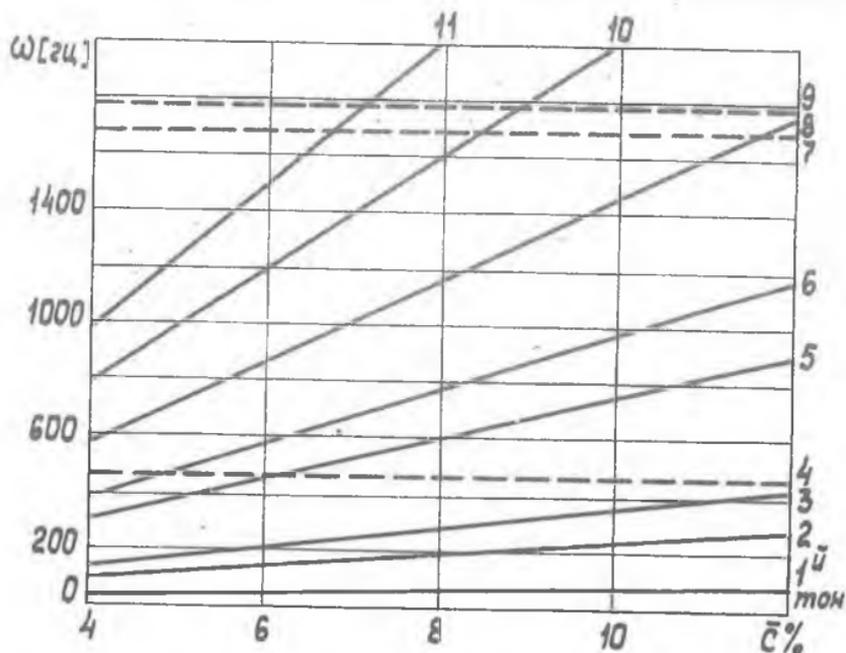


Рис. 3

Результаты расчетов консольно защемленной прямоугольной пластины постоянной относительной толщины $\bar{c} = 10\%$ и удлинения изменяющимся в диапазоне $\lambda = 1,2 + 2,2^*$ (рис. 2), показывают, что уже в спектре низших 10 тонов с уменьшением удлинения наблюдается понижение частот тонов колебаний в плоскости элемента (кривые 8, 9) по отношению к изгибно-крутильным тонам (кривые 7). Результаты расчетов консольно защемленной прямоугольной пластины постоянного удлинения $\lambda = 2$ и относительной толщиной

* Диапазоны изменения варьируемых величин характерны для пластинчатых элементов реальных конструкций.

получаются в диапазоне $\bar{c} = 4 + 12\%^{**}$ (рис. 3), показывают, что увеличение относительной толщины влечет перестановку тонов колебаний, связанных с деформацией элемента в своей плоскости (кривые 4, 7, 9) по отношению к изгибно-крутильным тонам (кривые 1, 3, 5, 6, 8, 10, 11), причем последние смещаются в верхнюю часть спектра.

Как видно из рис. 2, 3, для всех приведенных вариантов расчета, кроме $\bar{\lambda} = 2$, $\bar{c} = 4-6\%$, четвертым по порядку является изгибный в плоскости элемента тон. Следовательно, этот тон может входить в число учитываемых при определении динамических нагрузок на судах с динамическими принципами поддержания (ДПП).

В заключение следует отметить, что полученная система уравнений (6) позволяет получать качественно новые частоты и формы колебаний по сравнению с методикой, предложенной в [2, 3], при этом новые частоты вносят существенные дополнения в спектр обычно определяемых частот.

Л и т е р а т у р а

1. Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Спигирев В.Ф. Расчет крыльевых устройств судов на прочность. Казань, Таткнигоиздат, 1975.

2. Вахитов М.Б., Селин И.С., Петрушенко Ю.Я. Метод расчета свободных колебаний крыльевых устройств судов как пластинчатых рам. Тезисы докладов на Всесоюзной конференции "Пути повышения прочности, улучшения конструкций и технологии постройки судов с динамическими принципами поддержания", "Судостроение", Ленинград, 1975.

3. Петрушенко Ю.Я. "К расчету свободных колебаний элементов пластинчатых рам". ВИМИ, депонированная рукопись № ВМ.Д02848, 1977.

** Диапазоны изменения варьируемых величин характерны для пластинчатых элементов реальных конструкций.