ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 4, 1978

УДК 539.4:629.7.02

В.И.Халиулин

К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ МОНОЛИТНОГО КРЫЛА

Определение температурных напряжений и деформаций монолитного крыла, как известно [1], можно производить отдельно от симметричного T_c и обратно симметричного T_a нагрева. Обычно ограничиваются расчетом только изгибных напряжений [4], вызванных действием обратно симметричной составляющей T_a. Между тем, определенный интерес вызывает величина мембранных усилий, возникающих в результате воздействия симметричного температурного поля. В развитие ранее опубликованных работ [2, 3] по расчету крыльев на изгиб здесь предлагается методика решения плоской температурной задачи применительно к монолитному крылу. Как и в [3], в качестве расчетной схемы принимаем конструктивно-анизотропную пластину, состоящую из толстой верхней и нижней обшивок, подкрепленных ребрами жесткости (рис. 1). Условия крепления крыла к корпусу произвольные: полная или частичная заделка по корневой хорде, наличие шарнирного опирания в отдельных точках. Температурное поле предполагается стационарным. Изменение механических постоянных материала по температуре учитывается при подсчете жесткостных характеристик пластины.

1. Крыло относим к косоугольно-полярной системе координат $z\xi\zeta$, переход к которой от декартовой $xy\zeta$ осуществляется по формулам:

$$z = y, \quad \xi = \frac{x}{y}.$$

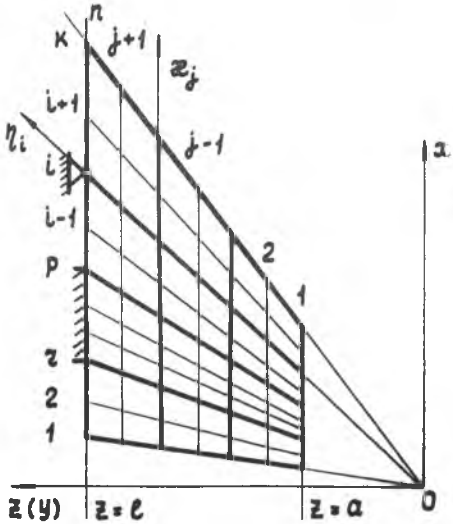

Рис. I

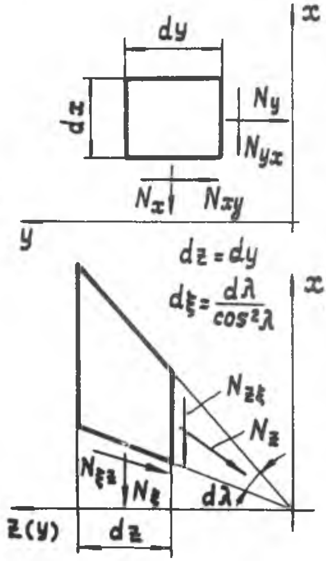

Рис. 2

Рассматривая рис. 2, можно установить связь между усилиями и деформациями в косоугольно-полярных и прямоугольных координатах.

$$N_x = N_z \xi^2 \chi + N_\xi \frac{1}{\chi} + 2N_{z\xi}\xi, \qquad N_y = N_z \chi, \tag{I}$$

$$N_{xy} = N_z \xi \chi + N_{z\xi},$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_\xi, \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{\chi^2}(\varepsilon_z + \varepsilon_\xi \xi^2 \chi^2 + \gamma_{z\xi}\xi\chi), \tag{2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\chi}(\gamma_{z\xi} - 2\varepsilon_\xi \xi), \quad \text{где} \quad \chi = \frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}}.$$

Для изотропной пластины закон Гука в косоугольно-полярной системе координат с учетом температуры запишется:

$$N_z^n = \bar{D}_0[\varepsilon_z + \bar{\mu}_1 \varepsilon_\xi + \bar{\mu}_2 \gamma_{z\xi}] - K_t \alpha T,$$

$$N_\xi^n = \bar{D}_0[\bar{\mu}_1\varepsilon_z + \varepsilon_\xi + \bar{\mu}_2\gamma_{z\xi}] - K_t\alpha T,$$
$$N_{z\xi}^n = \bar{D}_0[\bar{\mu}_2(\varepsilon_z + \varepsilon_\xi) + \bar{\mu}_3\gamma_{z\xi}] + K_t\xi\chi\alpha T. \qquad (3)$$

Здесь t^n , E^n , α , T - толщина, модуль упругости, коэффициент линейного теплового расширения и температура пластины, $\bar{D}_0 = \frac{E^n t^n}{1-\mu^2}\frac{1}{\chi^3}$

$$\bar{\mu}_1 = (\xi^2+\mu)\chi^2,\quad \bar{\mu}_2 = -2\xi\chi,\ \bar{\mu}_3 = 2(1-\mu+2\xi^2)\chi^2,\quad K_t = \frac{E^n t^n}{(1-\mu)\chi}.$$

Получим физические зависимости для пластины, анизотропия упругих свойств которой создается сходящимися продольными и параллельными оси Ox поперечными ребрами жесткости.

Выделим из этой пластины трапециевидный элемент лучами i - I, i + I и вертикальными линиями j - I, j + I (рис. I).

Для упрощения рассуждений положим, что в рассматриваемую область попали только одно продольное ребро, совпадающее с лучом, и одно поперечное, ось которого совпадает с сечением j (рис. 3). Площади подкрепляющих элементов в их нормальных сечениях обозначим f_i и f_j соответственно. Очевидно, что для ребер жесткости зависимости "усилия-деформации" будут иметь простой вид:

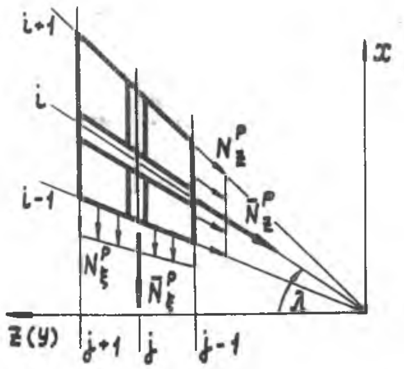

Рис. 3

$$N_\xi^p = \frac{z_{\xi\xi}}{\bar{D}_0}(\varepsilon_\xi - \alpha T), \qquad N_z^p = \frac{z_{zz}}{\bar{D}_0}(\varepsilon_z - \alpha T), \qquad (4)$$

где $\bar{N}_{\xi j}^p$ и $\bar{N}_{z i}^p$ - осевые сосредоточенные силы в ребрах i , j (рис. 3).

Вводя погонные усилия N_ξ^p, N_z^p по граням элемента, статически эквивалентные силам $\bar{N}_\xi^p$, $\bar{N}_z^p$, выражения (4) перепишем как

$$N_\xi^p = \frac{r_{\xi\xi}}{\bar{D}_o}(\varepsilon_\xi - \alpha T), \qquad N_z^p = \frac{r_{zz}}{\bar{D}_o}(\varepsilon_z - \alpha T). \tag{5}$$

В (5) используются обозначения $r_{\xi\xi} = \frac{E_i f_i}{E^n t^n (z_{j+1} - z_{j-1})}$,
$r_{zz} = \frac{E_i f_i \chi}{E^n t^n z(\xi_{i+1} - \xi_{i-1})}$.

Между N_ξ^p, N_z^p и $\bar{N}_\xi^p$, $\bar{N}_z^p$ очевидна следующая связь:

$$N_\xi^p = \frac{\bar{N}_\xi^p}{(z_{j+1} - z_{j-1})\chi}, \qquad N_z^p = \bar{N}_t^p \frac{1}{z(\xi_{i+1} - \xi_{i-1})}. \tag{6}$$

Для обшивки, как для изотропной пластины, физические зависимости определяются соотношениями (3). Складывая уравнения (3), (5) и разрешая их относительно ε_ξ, ε_z, $\gamma_{z\xi}$, устанавливаем связь между деформациями и усилиями в конструктивно-анизотропной пластине:

$$\varepsilon_\xi = \bar{D}[N_\xi \ell_{zz} + N_z \mu_1 + N_{z\xi}\mu_2 \ell_z] + \varepsilon_T,$$

$$\varepsilon_z = \bar{D}[N_\xi \mu_1 + N_z \ell_{\xi\xi} + N_{z\xi}\mu_2 \ell_\xi] + \varepsilon_T,$$

$$\gamma_{z\xi} = \bar{D}[N_\xi \mu_2 \ell_z + N_z \mu_2 \ell_\xi + N_{z\xi}\mu_3 \ell_{z\xi}] + \varepsilon_T \mu_2. \tag{7}$$

Здесь для упрощения записи введено предположение, что коэффициент линейного расширения α одинаков как для обшивки, так и для ребер жесткости. В соотношениях (7) введены суммарные усилия по граням рассматриваемого элемента $N_\xi = N_\xi^n + N_\xi^p$, $N_z = N_z^n - N_z^p$, $N_{z\xi} = N_{z\xi}^n$,
$\bar{D} = \frac{1}{E t^n \varkappa}$ – величина, обратная жесткости обшивки на растяжение,
$\varepsilon_T = \alpha(T)T(z,\xi)$ – относительное температурное удлинение.

Кроме того, в (7) используются обозначения:

$$\mu_1 = (\xi^2 - \mu)\chi^2, \quad \mu_2 = 2\xi^2\chi, \quad \mu_3 = 2(1 + \mu + 2\xi^2)\chi^2,$$

$$\varkappa = [(1 + r_\xi)(1 + r_z) - \mu_1^2 r_\xi r_z]\chi, \quad \ell_{zz} = 1 + r_z - \mu_1^2 r_z,$$

$$\ell_{\xi\xi} = 1 + r_\xi - \mu_1^2 r_\xi, \quad \ell_z = 1 + r_z - \mu_1 r_z, \quad \ell_\xi = 1 + r_\xi - \mu_1 r_\xi,$$

$$\ell_{z\xi} = (1 + r_\xi)(1 + r_z) - \mu_1^2 r_\xi r_z - \frac{\mu_2^2}{\mu_3}[r_\xi + r_z + 2 r_\xi r_z(1 - \mu_1)].$$

Рассматривая равновесия бесконечно малого анизотропного трапециевидного элемента $dz\,d\xi$ и предполагая, что по его граням действуют суммарные погонные усилия N_z, N_ξ, $N_{z\xi}$, можно получить три уравнения равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial z}(z N_z) + \frac{\partial}{\partial \xi}(N_{z\xi})\sqrt{1 + \xi^2} = 0.$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}(z^2 N_{z\xi})+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(N_{z\xi}\sqrt{1+\xi^2}\right)=0, \qquad N_{z\xi}=N_{\xi z}. \tag{8}$$

Если ввести функцию усилий $\varphi(z,\xi)$ так, чтобы

$$N_\xi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\chi, \quad N_z=\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi^2}\frac{1}{z^2\chi}, \quad N_{z\xi}=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\xi}-\frac{1}{z}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right). \tag{9}$$

то уравнения (8), очевидно, удовлетворятся тождественно.

2. Разрешающие уравнения для отыскания усилий получим на основании принципа минимума дополнительной потенциальной энергии, которая для линейно упругого тела равна потенциальной энергии деформации $\mathcal{U}$:

$$\delta\,\mathcal{U}=0. \tag{I0}$$

Потенциальную энергию деформации крыла представим в виде суммы:

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}^{обш}+\mathcal{U}^{л}+\mathcal{U}^{н},$$

где $\mathcal{U}^{обш}$ – энергия обшивки, вызванная мембранными усилиями N_z^n, N_ξ^n, $N_{z\xi}^n$; $\mathcal{U}^{л}$, $\mathcal{U}^{н}$ – потенциальная энергия ребер, создаваемая осевыми силами $\bar N^p_{z_i}$ и $\bar N^p_{\xi_j}$.

Энергия деформации обшивки в декартовой системе координат определяется известным выражением

$$\mathcal{U}^{обш}=\frac{1}{2}\int\limits_x\int\limits_y\left(N_x^n\varepsilon_x+N_y^n\varepsilon_y+N_{xy}^n\gamma_{xy}\right)dx\,dy. \tag{II}$$

Пользуясь соотношениями (I), (2) и переходя в интеграле к переменным z, ξ, получим выражение для энергии деформации обшивки в косоугольно-полярных координатах:

$$\mathcal{U}^{обш}=\frac{1}{2}\int\limits_\xi\int\limits_z\left(N_z^n\varepsilon_z+N_\xi^n\varepsilon_\xi+N_{z\xi}^n\gamma_{z\xi}\right)\frac{z}{\chi}\,dz\,d\xi. \tag{I2}$$

Энергию деформации продольных и поперечных ребер можно записать:

$$\mathcal{U}^{л}=\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\eta_i}\bar N^p_{z_i}\varepsilon_{z_i}\,d\eta_i, \qquad \mathcal{U}^{н}=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\text{æ}_j}\bar N^p_{\xi_j}\varepsilon_{\xi_j}\,d\text{æ}_j. \tag{I3}$$

Здесь η_i, æ_j – вспомогательные оси, совпадающие с осями ребер жесткости (рис. I); k, n – число продольных и поперечных элементов соответственно.

Заменим сосредоточенные силы в элементах погонными усилиями, действующими в пределах двух соседних координатных линий. Переходя в соотношениях (I3) от переменных η, æ к z, ξ и заменяя суммы соответствующими интегралами по всему крылу, будем иметь выражения

$$\mathcal{U}^{\Lambda}=\frac{1}{2}\iint\limits_{\xi\,z} N_z^{p}\,\varepsilon_z\sqrt{1+\xi^2}\,z\,dz\,d\xi,\qquad \mathcal{U}^{H}=\frac{1}{2}\iint\limits_{\xi\,z} N_\xi^{p}\,\varepsilon_\xi\sqrt{1+\xi^2}\,z\,dz\,d\xi, \tag{I4}$$

где N_z^p и N_ξ^p определяются формулами (6).

Складывая (I2) и (I4), получим для всего крыла:

$$\mathcal{U}=\frac{1}{2}\iint\limits_{\xi\,z}(N_z\varepsilon_z+N_\xi\varepsilon_\xi+N_{z\xi}\gamma_{z\xi})\,z\,dz\,d\xi. \tag{I5}$$

Здесь N_z, N_ξ, $N_{z\xi}$ – суммарные погонные усилия.

Выражая теперь деформации ε_z, ε_ξ, $\gamma_{z\xi}$ через усилия с помощью физических соотношений для конструктивно-анизотропной пластины (7), будем иметь

$$\mathcal{U}=\frac{1}{2}\iint\limits_{z\,\xi}\Big\{\bar{D}\big[N_\xi^2 e_{zz}+N_z^2 e_{\xi\xi}+2\mu_1 N_z N_\xi+2\mu_2 N_{z\xi}(N_z e_\xi+N_\xi e_z)+$$
$$+\mu_3 N_{z\xi}^2 e_{z\xi}\big]+(N_\xi+N_z+\mu_2 N_{z\xi})\varepsilon_T\Big\}\frac{z}{\chi}\,dz\,d\xi. \tag{I6}$$

Если заменить N_z, N_ξ, $N_{z\xi}$ в соответствии с (9) функцией усилий $\varphi(z,\xi)$, выражение (I6) преобразуется к следующему виду:

$$\mathcal{U}=\frac{1}{2}\iint\limits_{z\,\xi}\Big\{\bar{D}\Big[e_{zz}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\Big)^2+K_{\xi\xi}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\Big)^2+K_{z\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+K_\gamma\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{z}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)\times$$
$$\times\Big(e_z\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+K_\xi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\Big)+K_{\gamma\gamma}\Big[\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{z}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)\Big]^2+\Big[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+K_{t\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+K_{t\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{z}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big)\Big]\varepsilon_z\Big\}dz\,d\xi, \tag{I7}$$

где введены обозначения:

$$K_{\xi\xi}=\frac{e_{\xi\xi}}{\chi^2 z^4},\quad K_{z\xi}=\frac{2}{z^2}(\xi^2-\mu),\quad K_\gamma=-4\xi,\quad K_{t\xi}=\frac{1}{z^2\chi^2},$$
$$K_\xi=(1+\xi^2)e_\xi,\quad K_{\gamma\gamma}=2(1+\mu+2\xi^2)e_{z\xi}.$$

3. Операции и порядок получения разрешающих уравнений сохраним в соответствии с работами [2, 3]. Из точки перемещения передней и задней кромок проведем " к " лучей с переменным шагом $h_i=\xi_{i+1}-\xi_{i-1}$ (рис. I). В качестве неизвестных примем функции усилий $\varphi(z)$ вдоль этих прямых.

Вычисляя интеграл по хорде в (I7) с помощью какой-либо интерполяционной формулы, можно записать

$$\mathcal{U}=h\sum_{i=1}^{K} q_i\,\mathcal{U}_i, \tag{I8}$$

где q_i – весовые числа, определяемые выбранной интерполяционной формулой; $h=\frac{\xi_K-\xi_1}{K-1}$ – средний шаг между координатными лучами.

Производные по переменной ξ выразим через значения функции $\varphi(z)$ в фиксированных точках с помощью центральных конечно-разностных формул.

Рассматривая в качестве вариации напряжений любое изменение функции усилий $\varphi(z)$, возможное с точки зрения выполнения статических граничных условий, в соответствии с (I0) получим:

а) систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{p=i-2}^{i+2}\left[F_1'' + F_2' + F_3\right]_p - P_{1_i} - P_{2_i}' + P_{3_i}'' = 0 \quad (i = \overline{2, k-1}) ; \qquad (I9)$$

б) естественные краевые условия на закрепленном участке по корневой хорде при $z = \ell$ (рис. I).

$$\sum_{p=i-2}^{i+2}\left[F_1' + F_2\right]_p - P_{2_i} + P_{3_i}'\Big|_{z=\ell} = 0, \quad \sum_{p=i-2}^{i+2} F_{1p} + P_{3_i}\Big|_{z=\ell} = 0 \quad (i = \overline{z, p}) \qquad (20)$$

В выражениях (I9), (20) введены обозначения:

$$F_1 = R_1\varphi + R_2\varphi' + R_3\varphi'', \quad F_2 = R_4\varphi + R_5\varphi' + R_6\varphi'', \quad F_3 = R_7\varphi + R_8\varphi' + R_9\varphi'',$$

штрихом обозначены частные производные по z .

Величины $R_{\ell p}$ ($\ell = \overline{I,9}$; $p = \overline{i-2, i+2}$) определяются жесткостными характеристиками и геометрией крыла; P_{1_i} , P_{2_i} , P_{3_i} характеризуются температурным полем[ж)].

На свободном торце $z = a$ необходимо удовлетворить статическим краевым условиям $N_y = 0$, $N_{zy} = 0$ или согласно формулам перехода (I) $N_z = 0$, $N_{z\xi} = 0$. По-видимому, эти условия с точностью до несущественного линейного слагаемого будут выполнены, если положить

$$\varphi_i(a) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}(a) = 0 \qquad (i = \overline{1, k}) . \qquad (2I)$$

При $z = \ell$ на свободном от закрепления участке краевые условия будут такими же:

$$\varphi_i(\ell) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial z}(\ell) = 0 \qquad (i \neq \overline{z, p}) . \qquad (22)$$

ж) Из-за недостатка места формулы для вычисления R и P не приводятся.

Аналогично по продольным кромкам должны выполняться условия:

$$\varphi_i = 0\,, \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} = 0 \qquad (i = 1, \kappa)\,. \tag{23}$$

Из первого краевого условия (23) вытекает, что по крайним линиям уравнения вырождаются в элементарные $\varphi_i = 0$. Второе условие (23) дополняет систему до полной.

4. Для численного решения системы дифференциальных уравнений (22) используем, как и в [2, 3], аппарат интегрирующих матриц [5]. Приведем уравнения системы (I9) к интегральному виду, для чего проинтегрируем их по z два раза от z до ℓ. В итоге получим

$$\sum_{p=i-2}^{i+2}\Big[F_1 - \int_z^{\ell} F_2\,dz + \int_z^{\ell}\!\!\int_z^{\ell} F_3\,dz^2\Big]_p = \int_z^{\ell}\!\!\int_z^{\ell} P_{1i}\,dz^2 - \int_z^{\ell} P_{2i}\,dz + P_{3i} + Q_i(\ell - z) + M_i\,, \tag{24}$$

$$(i = \overline{2, \kappa-1})$$

где обозначено:

$$Q_i = -\sum_{p=i-2}^{i+2}\big[F_1' + F_2\big]_p + P_{2i} - P_{3i}'\Big|_{z=\ell}\,, \quad M_i = \sum_{p=i-2}^{i+2} F_1 + P_{3i}\Big|_{z=\ell}\,. \tag{25}$$

Постоянные интегрирования Q_i и M_i для заделанного участка торца крыла в соответствии с краевыми условиями (20) равны нулю, а для свободных участков на торце $z = \ell$ пока неизвестны.

Выразим $\varphi_i(z)$ и $\varphi_i'(z)$ в (24) через $\varphi_i''(z)$. С учетом краевых условий (2I) будем иметь

$$\varphi_i = \int_a^z\!\!\int_a^z \varphi_i''\,dz^2, \quad \varphi_i' = \int_a^z \varphi_i''\,dz\,. \tag{26}$$

Записывая уравнения (24) с учетом (26) в " n " дискретных сечениях с помощью интегрирующих матриц [5], получим систему разрешающих уравнений в матричном виде:

$$\sum_{p=i-2}^{i+2}\big[\{\bar F_1\} - \mathcal{J}_2\{\bar F_2\} + \mathcal{J}_2^2\{\bar F_3\}\big]_p = \{\bar P\}_i + Q_i\{\bar z\} + M_i\{e\}\,, \tag{27}$$

где

$$\{\bar F_1\}_i = [R_1\mathcal{J}_1^2 + R_2\mathcal{J}_1 + R_3]_i\{\varphi_i''\}, \quad \{F_2\}_i = [R_4\mathcal{J}_1^2 + R_5\mathcal{J}_1 + R_6]_i\{\varphi_i''\}$$

$$\{\bar F_3\}_i = [R_7\mathcal{J}_1^2 + R_8\mathcal{J}_1 + R_9]_i\{\varphi_i''\}, \quad \{P\} = \mathcal{J}_2^2 P_{1i} - \mathcal{J}_2 P_{2i} + P_{3i}\,.$$

В системе уравнений (27) $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ – интегрирующие матрицы первого и второго типов [5]; R_i – диагональные матрицы значений соответствующих жесткостных коэффициентов в расчетных сечениях по i-ой линий; $\{\varphi_i''\}$, $\{P_1\}_i$, $\{P_2\}_i$, $\{P_3\}_i$ – столбцы искомых функций и нагрузочных членов по i-ой линии; $\{\bar z\} = \{\ell - z\}$ – столбец координат расчетных сечений, начиная с торца $z = \ell$.

Уравнения (27) можно объединить в одно матричное

$$[A]\{\varphi''\} = [B]\begin{Bmatrix} Q \\ M \end{Bmatrix} + \{P\}. \qquad (28)$$

Если выражение (28) дополнить условиями на свободном участке торца $z = \ell$: $\varphi_i(\ell) = 0$ и $\varphi_i'(\ell) = 0$, то получим замкнутую систему алгебраических уравнений для нахождения $K \times n$ вторых производных $\{\varphi_i''\}$ и $2 \times (p - r + 1)$ неизвестных констант Q , M . Далее, пользуясь формулами (9), (7), (5), (3), (2), (I), можно полностью определить напряженно-деформированное состояние конструкции.

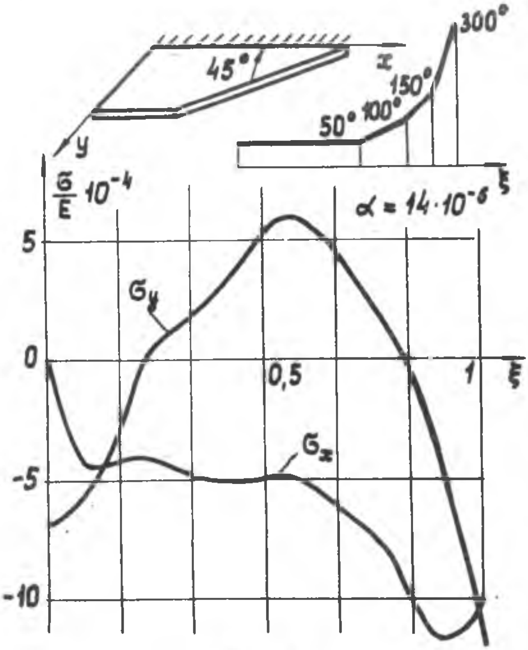

Рис. 4

В заключение подчеркнем, что дифференциальные уравнения (I9) по своей структуре полностью идентичны уравнениям поперечного изгиба крыла [3]. Кроме того, характер граничных условий по торцам $z = a$ и $z = \ell$ в плоской задаче и задаче изгиба для консольной пластины позволяет в единообразной форме привести дифференциальные уравнения к интегральным. Жесткостные и нагрузочные коэффициенты в этих двух задачах вычисляются по однотипным формулам. Отмеченное соответствие между уравнениями и краевыми условиями для плоской задачи и задачи поперечного изгиба находится в полном согласии с положением о статико-геометрической аналогии [6, 7]. Очевидно, при численной реализации обе задачи могут быть решены по одной и той же программе.

В качестве иллюстрации на рис. 4 приведены эпюры напряжений σ_x , σ_y для трапециевидной консольной пластины в сечении y = I00 мм. Температурное поле по координате ξ имеет одинаковый закон распределения.

Литература

I. Фигуровский В.И. Расчет на прочность беспилотных летательных аппаратов. М., "Машиностроение", I973.

2. Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Халиулин В.И. Расчет консольных пластин методом прямых. - В сб.: Вопросы расчета методом прямых авиационных конструкций. Труды КАИ, вып. I66, Казань, I974.

3. Халиулин В.И. К расчету монолитных крыльев разностно-интегральным методом. В кн.: Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сборник, вып. 3, Куйбышевский авиационный институт, I977.

4. Вахитов М.Б. К расчету консольных анизотропных пластин при совместном действии поперечной нагрузки и неравномерного нагрева. В кн.: Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сборник, вып. I, Куйбышевский авиационный институт, I 9 7 4.

5. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы - аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики. ИВУЗ, "Авиационная техника", I966, № 3.

6. Калманок А.С. Строительная механика пластинок. М., Машстройиздат, I950.

7. Гольденвейзер А.Л. Уравнения теории тонких оболочек. ПММ, т. IУ, вып. 2, I940.