УДК 539.4:629.7.015.4

К РАСЧЕТУ МОНОЛИТНЫХ КРЫЛЬЕВ С ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ПОДКРЕПЛЯЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В.И.Халиулин, Н.У.Рахманкулов

В статьях /I, 2/ был изложен метод расчета на прочность монолитных крыльев с использованием пластинной аналогии.

Положенная в его основу интегрально-разностная схема решения краевых задач позволяет рассматривать несущие поверхности с произвольно меняющимися жесткостными характеристиками и нагрузкой при любом закреплении консоли.

В то же время применимость разрешающих уравнений /I,2/ ограничена классом крыльев со сходящимся или параллельным продольным силовым набором. При этом координатные линии выбранной системы координат должны быть совмещены с ребрами жесткости.

Настоящая работа является обобщением вышеупомянутой методики на расчет несущих поверхностей с произвольно расположенными подкрепляющими элементами[x)].

Рассмотрим трапецевидное крыло с ребрами жесткости, ориентированными произвольным образом (рис. I).

Как и в работах /I, 2/ нанесем на его поверхность расчетную сетку, состоящую из координатных линий косоугольно-полярной системы координат (рис. I).

Полюс этой системы поместим в точке пересечения передней и задней кромок конструкции. Кроме того, будем пользоваться дополнительной декартовой системой xoy , начало которой совместим с

---

x) Вопросы расчета крыльев произвольной силовой схемы рассматривались в статьях /3, 4/ в рамках разработанных авторами этих работ методов пластинной аналогии.

полюсом косоугольно-полярной.

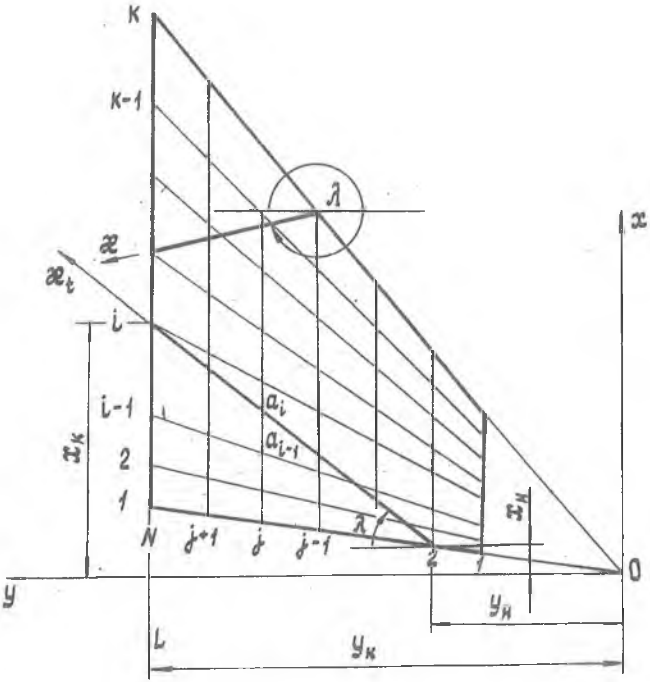

Рис. I

Положение ребер жесткости зададим координатами их конечных точек $x_H y_H$, $x_K y_K$.

Уравнения для расчета крыльев с произвольно ориентированным силовым набором получим на основе принципа возможных перемещений:

$$\delta U - \delta A = 0, \tag{I}$$

где потенциальная энергия деформации всей конструкции может быть представлена суммой:

$$U = U_{общ} + \sum_{t=1}^{T} U_T , \tag{2}$$

$U_{общ}$ – энергия деформации полой пластины (обшивки), определяемая в косоугольно-полярной системе координат выражением (3) работы /I/;

$U_t = \frac{1}{2}\int\limits_{x} EJ_t (W^{ææ})^2 dx$ – энергия деформации произвольно ориентированного ребра жесткости;

T – число подкрепляющих элементов;

$æ$ – координата вдоль оси ребра t

В работе /I/ с помощью метода прямых было получено выражение для вариации энергии деформации изотропной пластины, в котором все функции зависели только от координаты „η" вдоль выбранной системы прямых линий $\xi = const$:

$$\delta U_{общ} = \sum_{i=1}^{K}\int\limits_{\eta}[\Phi_1^{\eta\eta} + \Phi_2^{\eta} + \Phi_3]_i \,\delta W_i \, d\eta + \sum_{i=1}^{K}\left[(\Phi_1^{\eta} + \Phi_2)\delta W_i + \Phi_1 \delta W_i^{\eta}\right]\Big|_{\eta=\ell}^{\eta=L}, \tag{3}$$

где

$$\Phi_{1i} = \sum_{p=i-2}^{i+2}(R_1 W^{\eta\eta} + R_2 W^{\eta} + R_3 W)_p ,$$

$$\Phi_{2i} = \sum_{p=i-2}^{i+2}(R_4 W^{\eta\eta} + R_5 W^{\eta} + R_6 W)_p ,$$

$$\Phi_{3i} = \sum_{p=i-2}^{i+2}(R_7 W^{\eta\eta} + R_8 W^{\eta} + R_9 W)_p ;$$

$R_\ell \; (\ell = \overline{1,9})$ – функции жесткостных характеристик крыла, изменяющиеся вдоль прямых $\xi = const$.

Рассмотрим теперь вариацию энергии деформации подкрепляющего элемента, ось которого обозначим $æ_t$ (рис. I).

После интегрирования по частям будем иметь:

$$\delta U_t = \frac{\delta}{2}\int\limits_{æ} EJ_t (W^{ææ})^2 dæ = \int\limits_{æ}(EJ_t W^{ææ})^{ææ}\,\delta W dæ - [(EJW^{ææ})^{æ}\,\delta W - EJW^{ææ}\,\delta W^{æ}]_t\Big|_0^{\ell_t} . \tag{4}$$

Между переменными косоугольно-полярной системы координат η , ξ и координатой вдоль оси ребра $æ$ будет иметь место зависимость

$$\eta = æ\cos\lambda + y_н$$

$$\xi = \frac{æ\sin\lambda + x_н}{æ\cos\lambda + y_н} ,$$

где λ – угол между осью элемента и осью Ox .

Пользуясь зависимостью (5) и оператором

$$\frac{\partial^n W}{\partial æ^n} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial æ}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial æ}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{(n)} W,$$

перейдем в (4) к переменным η и ξ . В результате получим

$$\delta u_t = \int_{æ} \Big[(G_1 A)^{\eta\eta} + (G_2 A^{\xi})^{\eta} \frac{1}{\eta^2} - G_2 A^{\xi} \frac{1}{\eta^3} + G_3 A^{\xi\xi} \frac{1}{\eta^4}\Big] \delta W dæ +$$

$$+ \Big\{ EJA\,\delta\Big(W^{\eta}\cos\lambda + W^{\xi}\frac{x}{\eta^2}\Big) - \big[(EJA)^{\eta}\cos\lambda + EJA^{\xi}\big]\delta W \Big\}\Big|_0^{\ell_t}. \qquad (6)$$

В выражении (6) введены обозначения

$$a = y_H \sin\lambda + x_H \cos\lambda$$

$$G_1 = EJ\cos^2\lambda, \quad G_2 = EJ\,2a\cos\lambda, \quad G_3 = EJa^2$$

$$A = W^{\eta\eta}\cos^2\lambda + W^{\xi\eta}\,2a\cos\lambda\,\frac{1}{\eta^2} - W^{\xi}\,2a\cos\lambda\,\frac{1}{\eta^3} + W^{\xi\xi}a^2\frac{1}{\eta^4}.$$

Обозначим выражение, стоящее в (6) под знаком интеграла, через $\Omega(W)$, а константу интегрирования (величину, заключенную в фигурные скобки) – $B\big|_0^{\ell_t}$, после чего заменим интеграл по $æ$ в выражении (6) приближенным значением в виде суммы его дискретных значений в точках пересечения ребра жесткости с координатными линиями $\eta = const$:

$$\delta u_t = \sum_{j=j_H}^{j_K} c_j \Omega_j \delta W_j + B\Big|_0^{\ell_t}, \qquad (7)$$

где j_H , j_K – номера сечений – начального и конечного, между которыми расположено ребро жесткости, c_j – весовые числа, зависящие от выбранной интерполяционной формулы.

Решая задачу интегрально-разностным методом, приходится оперировать дискретными величинами прогибов и его производных, определенных в узлах расчетной сетки. Поэтому все функции от прогибов, входящие в (7), необходимо выразить через значения этих же функций в близлежащих узлах.

В соответствии с этим выразим значения Ω_j для сечения балки, попадающего между лучами $i-1$ и i , через значения в узлах расчетной сетки $(i-1)_j$ и $(i)_j$.

При линейной аппроксимации функции $\Phi_j \delta W_j$ получим

$$\delta u_t = \sum_{j=j_H}^{j_K} \frac{c_j}{a_j} \sum_{p=(i-1)_j}^{(i)_j} (\Omega \delta W \alpha)_{pj} + B_t \Big|_0^{\ell_t} , \tag{8}$$

где a_{i-1} , a_i – расстояние от точки пересечения ребра с сечением j до узлов $(i)_j$ и $(i-1)_j$ соответственно.

Заменим в (8) производные по ξ конечно-разностными выражениями:

$$f_1^{\xi} = \sum_{q=i-1}^{i+1} \alpha_q f_q , \qquad f_i^{\xi\xi} = \sum_{q=i-1}^{i+1} \beta_q f_q ,$$

где α_q и β_q – коэффициенты конечно-разностных формул.

В итоге получим

$$\delta u_t = \sum_{j=j_H}^{j_K} \frac{c_j}{a_j} \sum_{p=(i-1)_j}^{(i)_j} (F_1^{\eta\eta} + F_2^{\eta} + F_3)_p , \tag{9}$$

где

$$F_1 = \sum_{\ell=p-2}^{p+2} (S_1 W^{\eta\eta} + S_2 W^{\eta} + S_3 W)_{\ell_j} ,$$

$$F_2 = \sum_{\ell=p-2}^{p+2} (S_4 W^{\eta\eta} + S_5 W^{\eta} + S_6 W)_{\ell_j} ,$$

$$F_3 = \sum_{\ell=p-2}^{p+2} (S_7 W^{\eta\eta} + S_8 W^{\eta} + S_9 W)_{\ell_j} .$$

Жесткостные коэффициенты $S_m (m = \overline{1,9})$ определяются по формулам

$$\begin{aligned}
&S_{1\ell} = G \cos^4 \lambda , \quad S_{2\ell} = G m_2 \alpha_q \\
&S_{3\ell} = G (m_2 \alpha_q + m_3 \beta_q) \frac{1}{\eta} \\
&S_{4\ell} = G m_2 \alpha_q , \quad S_{5\ell} = G m_3 k_\ell^{\alpha\alpha} \\
&S_{6\ell} = G (-m_3 k_\ell^{\alpha\alpha} + m_4 k_\ell^{\beta\beta}) \frac{1}{\eta} \\
&S_{7\ell} = G (-m_1 \alpha_q + m_2 \beta_q) \frac{1}{\eta} \\
&S_{8\ell} = G [(m_3 k_\ell^{\alpha\alpha} + m_4 k_\ell^{\beta\alpha}) \frac{1}{\eta^2} + \\
&+ (-m_4 \frac{1}{\eta^2} k_\ell^{\alpha\beta} + a^4 \frac{1}{\eta^8} k_\ell^{\beta\beta})] \quad (\ell = \overline{p-2, p+2}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (q = \overline{p-1, p+1})
\end{aligned} \tag{10}$$

В (I0) введены обозначения:

$$G = a_p E \mathcal{J}, \quad m_1 = 2a\cos^3\lambda \frac{1}{\eta^2}, \quad m_2 = a^2\cos^2\lambda \frac{1}{\eta^3}$$
$$m_3 = 4m_2 \frac{1}{\eta}, \quad m_4 = 2a^3\cos\lambda \frac{1}{\eta^5}.$$

Коэффициенты $k_\ell^{\mu\nu}$ определяются из условий:

$$\sum_{\ell=p-2}^{p+2} k_\ell^{\mu\nu} W_\ell = \sum_{q=p-1}^{p+1} \mu_q \sum_{\ell=q-1}^{q+1} \nu_\ell W_\ell \quad (\mu, \nu = \overline{\alpha, \beta})$$

Внесем теперь дискретные величины $F_1^{\eta\eta}$, F_2^{η}, F_3 в (9) в сечении j под знак интеграла

$$\delta U_t = \sum_{j=j_H}^{j_K} \frac{c_j}{a_j} \sum_{p=(i-1)_{j}}^{(i)_j} \int \Delta (F_1^{\eta\eta} + F_2^{\eta} + F_3)_p \, \delta W_p + B \Big|_0^{\ell_t}. \tag{II}$$

Коэффициент Δ = I в сечении j, в остальных сечениях Δ = 0.

Теперь выражения (3) и (II) можно объединить в одно:

$$\delta U = \delta U_{общ} + \sum_{t=1}^{T} \delta U_T = \sum_{i=1}^{K} \int_\eta (\bar{\Phi}_1^{\eta\eta} + \bar{\Phi}_2^{\eta} + \bar{\Phi}_3)_i \, \delta W_i \, d\eta + \sum_{i=1}^{K} \left[(\bar{\Phi}_1^{\eta} + \bar{\Phi}_2) \delta W_i + \bar{\Phi}_1 \delta W_i^{\eta} \right] \Big|_{\eta=\ell}^{\eta=L} ; \tag{I2}$$

при этом жесткостные функции $\bar{R}_\ell \; (\ell = \overline{1,9})$, входящие в $\bar{\Phi}_1$, Φ_2, Φ_3, будут вычисляться по формулам

$$\bar{R}_{\ell_p} = R_{\ell_p} + \sum_{t=1}^{T} (S_{\ell_p} \eta_{pj})_t \quad (p = \overline{i-2, i+2}; \; i = \overline{1, K}). \tag{I3}$$

Сумма во втором слагаемом (I2) берется по всем ребрам жесткости. Поскольку выражение (I2) по внешнему виду полностью совпадает с равенством (9) работы /I/, то из него можно, как и в /I/, получить систему дифференциальных уравнений

$$(\bar{\Phi}_1^{\eta\eta} + \bar{\Phi}_2^{\eta} + \bar{\Phi}_3)_i = \bar{P}_i \quad (i = \overline{1, K}) \tag{I4}$$

и соответствующие им краевые условия.

После этого с помощью аппарата интегрирующих матриц уравнения (I4) приводятся к системе алгебраических уравнений вида

$$[A]\{W\} = \{P\}, \tag{I5}$$

где матрица $[A]$ определяется жесткостными характеристиками крыла, а $\{P\}$ – внешней нагрузкой,

$$\{W\} = \left\{ \{W_1^{\eta\eta}\}, W_{L_1}, W_{L_1}^{\eta}, \ldots, \{W_K^{\eta\eta}\}, W_{L_K}, W_{L_K}^{\eta} \right\} \; -$$

- вектор, состоящий из значений $\partial^2 W/\partial \eta_i^2$ в расчетных сечениях всех линий и констант интегрирования W_{L_i}, $W_{L_i}^{\eta}$ при $\eta = L$.

Решением уравнения (I3) можно найти вектор $\{W\}$, который полностью определяет напряженно-деформированное состояние крыла.

Изложенный метод был применен к расчету ряда подкрепленных произвольно ориентированными ребрами жесткости консольных пластин.

В качестве примера был выполнен расчет прямоугольной частично защемленной пластины с тремя подкрепляющими элементами I, 2, 3 (рис. 2) при следующих соотношениях ее размеров: $\frac{L}{B} = 0,55$; $\frac{b}{B} = 0,45$; $\frac{c_2}{B} = 0,05$; $\frac{c_1}{B} = 0,2$; $\frac{c_3}{B} = 0,5$; $\frac{h}{B} = 0,038$; $EJ_{b}/D_{пл}B = 0,I25$.

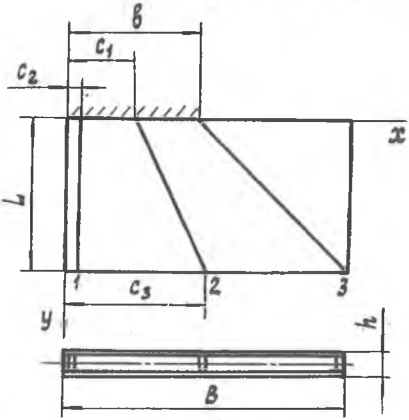

Рис. 2

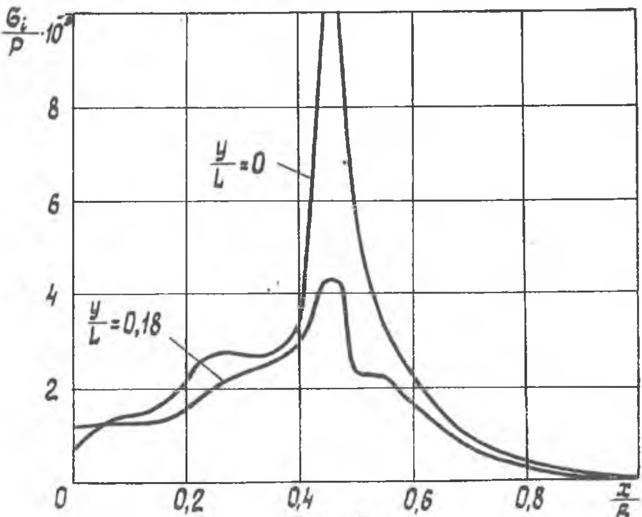

Рис. 3

Результаты расчетов в виде графиков интенсивности напряжений в двух сечениях $y = const$ приведены на рис. 3, а относительных прогибов – на рис. 4.

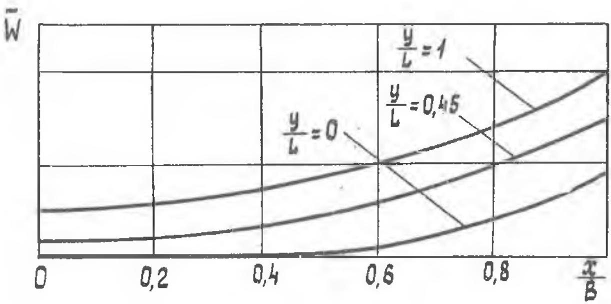

Рис. 4

Литература

1. Халиулин В.И. К расчету монолитных крыльев разностно-интегральным методом. – В сб.: Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций, вып. 3, Куйбышев, КуАИ, 1977.

2. Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Халиулин В.И. Расчет крыльев по пластинной аналогии с использованием интегрально-разностного метода. – ИВУЗ, Авиационная техника, 1980, № 2.

3. Левашов П.Д. К определению жесткостных характеристик подкрепленных пластинок. – ИВУЗ, Авиационная техника, 1970, № 4.

4. Липин Е.К. Применение метода дискретизации решения по заданным направлениям в расчетах крыльев с произвольным расположением силовых элементов. – Труды ЦАГИ, вып. 1504, М., 1973.