ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 3, 1977

УДК 539.4:629.7.02

В.И.Халиулин

К РАСЧЕТУ МОНОЛИТНЫХ КРЫЛЬЕВ РАЗНОСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

В настоящей работе, являющейся дальнейшим развитием [1, 2], рассматривается расчет крыльев малого удлинения, трапециевидных или треугольных в плане со сходящимся продольным силовым набором и сложными условиями крепления крыла к корпусу. В качестве расчетной схемы выбрана консольная конструктивно-анизотропная пластина переменной толщины.

Дискретно учитываемыми силовыми элементами являются продольные ребра (лонжероны) (рис. 1) и поперечные балки (нервюры), ориентированные по потоку. Условия сочленения крыла с корпусом произвольные, т.е. допускается упругая заделка по части хорды и в отдельных точках, учитывается искривление оси бортовой нервюры в результате изгиба корпуса в вертикальной плоскости. Кроме того, возможен учет комбинированного соединения, состоящего из частичной заделки и шарнирного крепления в отдельных узлах консоли.

При решении этой задачи целесообразно использовать косоугольно-полярную систему координат, переход к которой от декартовой осуществляется по формулам: $\tau = y$, $\xi = \frac{x}{y}$.

Разрешающие уравнения получим на основе принципа возможных перемещений:

$$\delta U = \delta A. \qquad (1)$$

Потенциальная энергия деформации конструкции U может быть представлена суммой (2):

$$U = U_{пл} + U_{л} + U_{н}, \qquad (2)$$

где составляющие по пластине, продольным и поперечным ребрам в косоугольно-полярной системе координат имеют вид:

$$U_{пл} = \frac{1}{2}\int_{a}^{в}\int_{\xi_1}^{\xi_k} D\Big\{\Big[(1+\xi^2)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2\xi z\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \xi} + z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\xi\frac{\partial w}{\partial \xi}\Big]^2 +$$

$$+ 2(1-\mu)\Big[\Big(-\xi\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + z\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big)^2 -$$

$$- \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\Big(\xi^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2\xi z\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial z} + z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\xi\frac{\partial w}{\partial \xi}\Big)\Big]\Big\}\frac{1}{z^2}\,dz\,d\xi$$

$$U_л = \sum_{i=1}^{K}\frac{1}{2}\int_{a}^{в} EJ_{лi}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\Big)_i^2 \cos^3\beta_i\,dz,$$

$$U_н = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_k} EJ_{нj}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\Big)^2\frac{1}{z^3}\,d\xi.$$

Здесь $D = \frac{E}{12(1-\mu^2)}(t^3 - t_{вн}^3)$ – цилиндрическая жесткость ны, $EJ_{i,j}$ – изгибные жесткости ребер.

Кроме того, работа внешних сил запишется так:

$$A = \int_{a}^{в}\int_{\xi_1}^{\xi_k} p w z\,dz\,d\xi + \int_{\xi_1}^{\xi_k}\Big[Q_a w + M_a\Big(\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\xi}{z} - \frac{\partial w}{\partial z}\Big)\Big]z\Big|_{z=a} d\xi +$$

$$+ \int_{\xi_1}^{\xi_k}\Big[Q_в w + M_в\Big(\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\xi}{z} - \frac{\partial w}{\partial z}\Big)\Big]z\Big|_{z=в} d\xi.$$

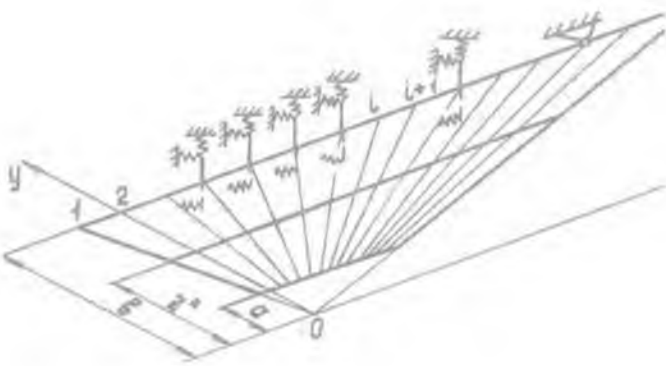

Рис. I

Задачу решаем методом прямых, для чего из точки 0 проведем "К" лучей с произвольным шагом h_i (рис. I). Разрешающие уравнения получим в том же порядке, как и в работе [2].

Вычисляя интегралы по хорде в (3)-(6) с помощью какой-либо интерполяционной формулы, получим:

$$U=\sum_{i=1}^{K} c_i h_i U_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} c_i h_i \int_a^b F_i(\xi,z)\,dz+$$

$$\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{2}\int_a^b EJ_{A_i}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)_i^2 \cos^3\beta_i\,dz+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} h_i c_i EJ_{Hi,j}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_{i,j}^2\frac{1}{z_j^2}, \qquad (7)$$

$$A=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} c_i h_i\int_a^b p_i w z\,dz+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} h_i c_i\left\{\left[Q_t w+M_t\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{\xi}{z}-\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]z\right\}_{z=t}, \qquad (8)$$

$$(t=a,b)$$

где c_i - весовые числа, определяемые интерполяционной формулой, F_i - подынтегральная функция в выражении (3).

Производные по оси $O\xi$ в (7), (8) заменим центральными разностями:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_i=\frac{1}{2h}(w_{i+1}-w_{i-1}), \qquad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_i=\frac{1}{h^2}(w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}),$$

$$(i=1,2,\ldots K).$$

Для удобства записи полагаем, что по каждому лучу имеется ребро[*)]. С целью упрощения выкладок рассмотрим крыло только с одной усиленной поперечной балкой при $z=z^*$. Представим консоль в виде двух отсеков $a\le z\le z^*$ и $z^*\le z\le b$, по длине которых, очевидно, искомые функции w_i имеют различный вид. Для их определения используем соотношение (I), в итоге получим:

$$\int_a^{z^*} dz\sum_{i=1}^{K}(\Phi''_{0_i}+\Phi'_{1_i}+\Phi_{2_i}-\bar p_i)\delta w_i+\sum_{i=1}^{K}\left\{(\Phi'_{0_i}+\Phi_{1_i}-\bar Q_{a_i})\delta w_i-\right.$$

$$\left.-(\Phi_{0_i}+\bar M_{a_i})\delta w'_i\right\}_{z=a}-\sum_{i=1}^{K}\left\{(\Phi'_{0_i}+\Phi_{1_i})\delta w_i-\Phi_{0_i}\delta w'_i\right\}_{z=z^*-0}+\sum_{i=1}^{K}\{\psi_i\,\delta w_i\}_{z^*}+$$

$$+\int_{z^*}^{b} dz\sum_{i=1}^{K}(\Phi''_{0_i}+\Phi'_{1_i}+\Phi_{2_i}-p_i)\delta w_i+\sum_{i=1}^{K}\left\{(\Phi'_{0_i}+\Phi_{1_i})\delta w_i-\Phi_{0_i}\delta w'_i\right\}_{z=z^*+0}-$$

$$-\sum_{i=1}^{K}\left\{(\Phi'_{0_i}+\Phi_{1_i}-\bar Q_{b_i})\delta w_i-(\Phi_{0_i}-M_{b_i})\delta w'_i\right\}_{z=b}=0. \qquad (9)$$

[*)] Там, где ребер нет, вводим элементы с фиктивной, нулевой жесткостью.

В (9) использованы следующие обозначения:

$$\Phi_{0_i} = \sum_{p=i-2}^{i+2} (S_{p_1} w_p'' + S_{p_2} w_p' + S_{p_3} w_p) + \frac{1}{h_i} E J_{\lambda_i} \cos^3 \beta_i \, w_i'' ,$$

$$\Phi_{1_i} = \sum_{p=i-2}^{i+2} (S_{p_4} w_p'' + S_{p_5} w' + S_{p_6} w_p),$$

$$\Phi_{2_i} = \sum_{p=i-2}^{i+2} (S_{p_7} w_p'' + S_{p_8} w_p' + S_{p_9} w_p),$$

$$\Psi_i = \sum_{p=i-2}^{i+2} \varphi_p w_p ,$$

$$\bar{M}_{a_i} = M_{a_i} z, \quad \bar{Q}_{a_i} = Q_{a_i} z - \frac{1}{2h_i} (M_{i+1} \xi_{i+1} - M_{i-1} \xi_{i-1})_{z=a} , \quad \bar{P}_i = P_i z,$$

где S_{p_j} – жесткостные характеристики пластины, подсчитанные в косоугольно-полярной системе координат*); φ_p характеризует жесткость поперечной балки.

Воспользуемся тем, что возможные перемещения δw_i и $\delta w_i'$ произвольны всюду, кроме точек, где по условию $w_i = 0$ или $w_i' = 0$ и получим систему дифференциальных уравнений (10), которым должна удовлетворять функция прогиба w :

$$\Phi_{0_i}'' + \Phi_{1_i}' + \Phi_{2_i} = \bar{P}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots K). \tag{10}$$

Кроме того, получаем естественные краевые условия на торце $z = a$:

$$\{\Phi_{0_i}' + \Phi_{1_i}\}_{z=a} = \bar{Q}_{a_i} , \quad \{\Phi_{1_i}\}_{z=a} = -\bar{M}_{a_i} \tag{11}$$

На кромке $z = b$ возможны следующие варианты краевых условий

1. Для линий, свободных от закрепления или попадающих в зону упругого защемления**):

$$\{\Phi_{0_i}' + \Phi_{1_i}\}_{z=b} = \bar{Q}_{b_i} , \quad \{\Phi_{1_i}\}_{z=b} = \bar{M}_{b_i}$$

2. В случае податливой шарнирной опоры:

$$\{\Phi_{0_i}' + \Phi_{1_i}\}_{z=b} = \bar{Q}_{b_i} , \quad \{\Phi_{1_i}\}_{z=b} = 0 \tag{12}$$

---

*) В связи с недостатком места формулы, по которым определяются S_{p_j} и φ_p , здесь не приводятся.

**) В первом случае $\bar{Q}_{b_i}$ и $\bar{M}_{b_i}$ определяются внешней нагрузкой, во втором случае – это неизвестные пока реакции со стороны корпуса.

3. При абсолютно жестком креплении крыла на соответствующем участке необходимо будет выполнить геометрические краевые условия:

$$w_{i(B)} = w'_{i(B)} = 0.$$

На стыке отсеков получаем:

$$\{\Phi'_{0i} + \Phi_{1i}\}_{z^*-0} = \{\Phi'_{0i} + \Phi_{1i}\}_{z^*+0} + \Psi_{i z^*}, \quad \{\Phi_{0i}\}_{z^*-0} = \{\Phi_{0i}\}_{z^*+0} \tag{I3}$$

Кроме того, здесь имеют место условия неразрывности деформаций в этом сечении:

$$w_i(z^*-0) = w_i(z^*+0), \qquad w'_i(z^*-0) = w'_i(z^*+0).$$

Таким образом, расчет крыла состоит в решении системы уравнений (I0) для каждого отсека с краевыми условиями (II), (I2) на торцах и условиями сопряжения на их границе (I3). Для численного решения системы дифференциальных уравнений (I0) используем аппарат интегрирующих матриц [3].

Как и в работе [2], проинтегрируем уравнения системы (I0) дважды. Отличие заключается в том, что в данном случае интегрирование можно производить лишь в пределах каждого участка. Объединив интегро-дифференциальные уравнения по каждому отсеку с учетом условий сопряжения (I3), получим выражения, справедливые для всей области:

$$\Phi'_{0i} + \Phi_{1i} + \int_a^z \Phi_{2i}\,dz + \psi_i = \int_a^z \bar{p}_i\,dz + \bar{Q}_{a_i}, \tag{I4}$$

$$\Phi_{0i} + \int_a^z \Phi_{1i}\,dz + \int_a^z dz \int_a^z \Phi_{2i}\,dz + \int_a^z \psi_i\,dz = \int_a^z dz \int_a^z p_i\,dz + \bar{Q}_{a_i} z + M_{a_i}, \tag{I5}$$

где

$$\psi_i = \begin{cases} 0 & \text{при } z \le z^* - 0 \\ \sum\limits_{p=i-2}^{i+2} \varphi_p w_p & \text{при } z \geq z^* + 0. \end{cases}$$

Выразив в уравнении (I5) w_i и w'_i через w''_i и записав его в дискретных сечениях с помощью интегрирующих матриц, получим систему матричных уравнений вида

$$\sum_{p=i-2}^{i+2} [A_{ip}]\{w''_p\} = \{\bar{p}_i\} + \sum_{p=i-2}^{i+2} w_{Bp}\{\alpha_{ip}\} + \sum_{p=i-2}^{i+2} w'_{Bp}\{\beta_{ip}\}, \tag{I6}$$

где $[A_{ip}]$, $\{\alpha_{ip}\}$, $[\beta_{ip}]$ определяются жесткостными характеристиками и размерами пластины, а $\{\bar{p}_i\}$ – распределенной нагрузкой

p и погонной нагрузкой Q_a и M_a на свободном торце $z = a$.

Количество матричных уравнений типа (16) равно числу прямых, т.е. k. Все эти уравнения можно объединить в одно:

$$[A]\{w''\} = \{P\} + [R]\begin{Bmatrix} w_b \\ w'_b \end{Bmatrix}. \qquad (17)$$

Для общности алгоритма в столбец $\begin{Bmatrix} w_b \\ w'_b \end{Bmatrix}$ включим значения w'_i и w_i при $z = b$ по всем прямым, т.е. его порядок будет равен $2k$, а прямоугольной матрицы $[R]$ – $kn \times 2k$. По линиям, свободным или попадающим в зону упругого защемления, $w_{i(b)}$ и $w'_{i(b)}$ неизвестны, при абсолютно жесткой заделке $w_{i(b)} = w'_{i(b)}$, при шарнирном закреплении $w_{i(b)} = 0$.

Из (17) получим

$$\{w''\} = \{P^*\} + [R^*]\begin{Bmatrix} w_b \\ w'_b \end{Bmatrix}, \qquad (18)$$

где

$$\{P^*\} = [A^{-1}]\{P\}; \quad [R^*] = [A^{-1}][R].$$

Для определения столбца неизвестных $\begin{Bmatrix} w_b \\ w'_b \end{Bmatrix}$ поступим так же, как и в работе [2], а именно, запишем уравнения системы (14) и (15) на кромке $k = b$, что с учетом естественных краевых условий (12) дает возможность получить $2k$ уравнений, представляющих из себя видоизмененные краевые условия (12) на торце $z = b$.

Пользуясь прежней методикой преобразования уравнений в матричные и используя (18), получим выражение для определения $\begin{Bmatrix} w_b \\ w'_b \end{Bmatrix}$:

$$[\tilde{A}]\begin{Bmatrix} w_b \\ w'_b \end{Bmatrix} = \{\bar{P}\} + [E]\begin{Bmatrix} Q_b \\ M_b \end{Bmatrix}, \qquad (19)$$

здесь $[\tilde{A}]$ по аналогии с (17) определяется жесткостными характеристиками крыла, а $\{\bar{P}\}$ – нагрузкой; $[E]$ – единичная матрица.

Из (19) можно выразить $\begin{Bmatrix} w_b \\ w'_b \end{Bmatrix}$:

$$\begin{Bmatrix} w_b \\ w'_b \end{Bmatrix} = \{\bar{\bar{P}}\} + [\tilde{A}^{-1}]\begin{Bmatrix} Q_b \\ M_b \end{Bmatrix}, \qquad (20)$$

где

$$\{\bar{\bar{P}}\} = [\tilde{A}^{-1}]\{\bar{P}\}.$$

Для окончательного решения задачи необходимо найти неизвестные усилия взаимодействия крыла с фюзеляжем $\begin{Bmatrix} Q_b \\ M_b \end{Bmatrix}$. Это можно сделать двумя путями.

Если для точек корпуса, в которых крепится крыло, известна зависимость деформаций от внешней нагрузки и реакций

$$\begin{Bmatrix} w_B \\ w'_B \end{Bmatrix} = \{q\} + [T]\begin{Bmatrix} Q_B \\ M_B \end{Bmatrix}, \qquad (21)$$

где $\{q\}$ определяет деформацию от внешней нагрузки, а $[T]$ - матрица податливости, то, приравняв из условий неразрывности деформаций правые части уравнений (20) и (2I), найдем $\begin{Bmatrix} Q_B \\ M_B \end{Bmatrix}$. Подставляя далее $\begin{Bmatrix} Q_B \\ M_B \end{Bmatrix}$ в (20) и используя (I8), получим вектор $\{w''\}$, который полностью определяет напряженное и деформированное состояние крыла.

Если зависимости (2I) нет, то можно решать задачу методом послѐдовательных приближений.

Предложенная методика обладает тем достоинством, что позволяет рассчитать консоль отдельно от корпуса, а затем состыковать решения и получить результат для их совместной работы. Кроме того, алгоритм обладает большой общностью, т.е. может быть реализован практически при всех возможных случаях крепления консоли к корпусу.

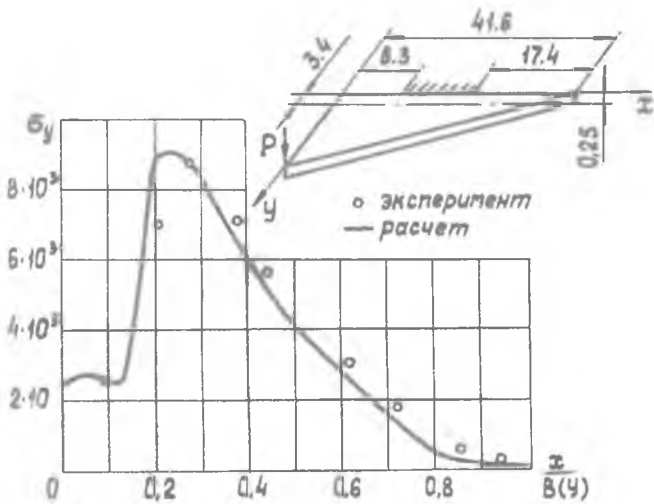

Рис. 2

Для апробирования метода проведены расчеты ряда пластин со сложными краевыми условиями. Рассмотрена треугольная консольная пластина, защемленная по части хорды. На рис. 2 показано сравнение расчетных значений нормальных напряжений σ_{y} в сечении, близком к заделке, с экспериментальными данными [4].

Литература

I. Вахитов М.Б., Сафариев М.С. К применению метода прямых для расчета пластин. Труды КАИ, вып. I43, I972.

2. Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Халиулин В.И. Расчет консольных пластин методом прямых. Труды КАИ, вып. I66, I974.

3. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы - аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики. ИВУЗ, "Авиационная техника", № 3, I966.

4. Hess N.J. Deflection and Stress Patterns in Plate-Type Structures, Theory vs. Test Results. Journal of the Aerospace Sciences N12, 1961.