формализовать подбор функций депланации, пользуясь системой (6). Очевидно, что упрощение решения задачи определения напряженно-деформированного состояния многозамкнутых конструкций приводит к усложнению соответствующей задачи нелинейного программирования, но в рамках существующего математического обеспечения такое перераспределение „нагрузки" представляется целесообразным.

Один из основных выводов, полученных из численных расчетов, заключается в том, что вид выбираемых функций депланации зависит от вида выбранного функционала, например, решается ли задача по критерию минимума веса конструкции или по критерию равнопрочности. Следовательно, с самого начала решения задачи выбор разрешающих функций для системы (I) и условий (2) должен быть связан с процессом оптимизации, что реализовано в рассмотренном подходе.

Литература

I. Образцов И.Ф. Некоторые вопросы расчета на прочность тонкостенных конструкций самолета. - М.: Оборонгиз, I957. - I76 с.

2. Образцов И.Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных пространственных конструкций. - М.: Машиностроение, I966. - 392 с.

3. Чичинадзе В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. - М.: Наука, I983. - 256 с.

УДК 629.7.0I5.4:5I9.6

В.Ф.Снигирев

К ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ АППРОКСИМАЦИИ ГЕОМЕТРИИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ДЛЯ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ

Оболочечные элементы летательных аппаратов, исходя из высоких требований, предъявляемых к аэродинамическим формам, имеют сложные внешние поверхности. Сложные поверхности летательных аппаратов при сжатых сроках проектирования наиболее эффективно описываются методами, ориентированными на применение ЭВМ /I/. Расчеты на прочность оболочечных элементов конструкций предъявляют дополнительные требования к методам описания поверхностей: возможность построения сети гауссовых координат и тензоров квадратичных форм для срединной поверхности оболочки /2-4/, совместность метода с собственно расчетом на прочность. В настоящее время для расчетов сложных конструкций применяется, как правило, метод конечных элементов (МКЭ). Методы, наиболее полно удовлетворяющие изложенным требованиям и обеспечивающие необходимую точность, наиболее эффективно могут быть построены на сплайн-аппроксимациях /5-II/. В настоящей работе рассмотрено применение МКЭ и метода граничных элементов для построения сплайнов, аппроксимирующих срединные поверхности оболочечных элементов летательных аппаратов. Рассматриваемые подходы основаны на теории абстрактных сплайнов /5-7/ и результатах работ /9-II/.

I. Пусть искомый сплайн удовлетворяет следующему векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial t^i}\left\{\sqrt{a}\, I^i_k\, a^{kj}\frac{\partial}{\partial t^j}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial t^e}\left(\sqrt{a}\, I^e_n\, a^{nm}\frac{\partial \bar{r}}{\partial t^m}\right)\right]\right\} - \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial t^i}\left(\sqrt{a}\, N^i_k\, a^{kj}\frac{\partial \bar{r}}{\partial t^j}\right) \equiv$$

$$\equiv div\{\underset{\sim}{I}\, grad\,[div\,\underset{\sim}{I}\, grad\,\bar{r}]\} - div\,(\underset{\sim}{N}\, grad\,\bar{r}) \equiv \qquad (I)$$

$$\equiv L\bar{r} = \bar{0}, \qquad \forall (t^1, t^2) \in \Omega^*,$$

где $(t^1, t^2) \equiv (t^i)$ – сеть параметров на поверхности параметров (σ^*) /2,4/; $\bar{r} = \bar{r}(t^i)$ – радиус-вектор произвольной точки аппроксимируемой поверхности (σ) ; $\underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{I}(t^i)$, $\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{N}(t^i)$ – тензоры второй валентности весовых параметров, задаваемых при расчете; $a^{ij} = a^{ij}(t^e)$ – контравариантные компоненты метрического тензора поверхности параметров (σ^*) ; Ω^* – область изменения параметров на поверхности (σ^*) ; $a = det\,(a_{ij})$ – дискриминант первой основной квадратичной формы поверхности параметров (σ^*) ; L – линейный симметричный оператор, соответствующий специально модифицированному уравнению продольно-поперечного изгиба пластины.

Модификация оператора уравнения пластины выполнена так, чтобы сплайн имел различную „жесткость" вдоль координатных линий и оператор L был симметричным.

От уравнения (I) перейдем к энергетическому функционалу

$$\Phi(\bar{r}) = (L\bar{r}, \bar{r}) \equiv \int_{\Omega^*} [(div\,\underset{\sim}{I}\, grad\,\bar{r})^2 +$$

$$+ (grad\,\bar{r})\,\underset{\sim}{N}\,(grad\,\bar{r})]\, d\omega + \int_{\Gamma^*} [\bar{r}\, U\, \bar{r} +$$

$$+\frac{\partial\bar{r}}{\partial n}V\frac{\partial\bar{r}}{\partial n}]d\gamma-\sum_{j=1}^{m}\bar{r}_j U_j\bar{r}_j\,; \qquad \forall\bar{r}\in C_1^1[\Omega^*]\,, \tag{2}$$

где $\bar{n}$ – внешняя нормаль к контурной линии $\Gamma^* \equiv \partial\Omega^*$ области параметров:

$$U\bar{r}=\underset{\sim}{I}\frac{\partial}{\partial n}(div\,\underset{\sim}{I}\,grad\,\bar{r})-\underset{\sim}{N}\frac{\partial\bar{r}}{\partial n}\equiv Q\bar{r}\equiv\bar{R}(t),\quad U_j\bar{r}_j=\bar{R}_j,$$

$V\frac{\partial\bar{r}}{\partial n}=-\underset{\sim}{I}\,div\,\underset{\sim}{I}\,grad\,\bar{r}\equiv T\bar{r}\equiv\bar{M}(t)$ – естественные краевые условия для уравнения (I), при которых оператор L симметричен; Q, T – дифференциальные операторы согласно предыдущим выражениям; $U=U(t)$, $V=V(t)$, $t\in\Gamma^*$ – некоторые произвольные функции, которые в дальнейшем могут быть исключены из расчетных уравнений.

Последний член в функционале (2) связан с рассмотрением бесконечно малых областей в окрестностях узлов сплайна (t_j^i), j = I, 2,..., m, в которых необходимо формулировать точечные краевые условия вследствие „реакций" сплайна.

2. Если информация о рассматриваемой поверхности некорректна, т.е. содержит погрешности измерений, округлений или предыдущих расчетов, то необходимо рассмотреть сглаживающий сплайн, удовлетворяющий условиям стационарности следующего функционала:

$$\Phi_c(\bar{r})=\alpha\,\Phi(\bar{r})+\sum_{j=1}^{m}\rho_j^{-1}(\bar{r}_j-\bar{r}_{oj})^2, \tag{3}$$

где $\Phi(r)$ – функционал (2), определяющий сплайн; $\bar{r}_j=\bar{r}(t_j^i)$, j = I,2,..., m – значения сплайна в его узлах; $\bar{r}_{oj}$, j = I, 2,..., m – аппроксимируемые значения поверхности (σ); α – параметр сглаживания (регуляризирующий множитель), назначаемый расчетчиком априорно или вычисляемый согласно методикам, изложенным в работах /5-7/; ρ_j, j = I,2,..., m – весовые множители, назначаемые при расчете или определяемые по методике работы /8/; m – количество аппроксимируемых значений поверхности (σ).

3. Рассмотрим интегральное тождество, определяющее обобщенное решение задачи (I). Для этого умножим (I) на произвольную вектор-функцию $\bar{p}=\bar{p}(t^i)$ и, интегрируя по области Ω^*, получим в результате двукратного применения формулы Гаусса-Остроградского следующее интегральное тождество типа Галеркина:

$$(L\bar{r},\bar{p})=0$$

или более подробно в виде

$$\int_{\Omega^*} [(\operatorname{div} \underset{\sim}{I} \operatorname{grad} \bar{p})(\operatorname{div} \underset{\sim}{I} \operatorname{grad} \bar{\tau}) + \operatorname{grad} \bar{p} \underset{\sim}{N} \operatorname{grad} \bar{\tau}] d\omega = \int_{\Gamma^*} [\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \bar{M} - \bar{p} \bar{R}] d\gamma + \sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j \bar{R}_j, \qquad \forall (\bar{p}, \bar{\tau}) \in C_1^1 [\Omega^*], \tag{4}$$

где использованы обозначения, введенные для функционала (2).

4. Применяя дважды формулу Гаусса-Остроградского в левой части тождества (4), получим

$$\int_{\Omega^*} [\operatorname{div} \underset{\sim}{I} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \underset{\sim}{I} \operatorname{grad} \bar{p}) - \operatorname{div} \underset{\sim}{N} \operatorname{grad} \bar{p}] \bar{\tau} d\omega = \int_{\Gamma^*} [\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} T \bar{\tau} - \bar{p} Q \bar{\tau} - \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial n} T \bar{p} + \bar{\tau} Q \bar{p}] d\gamma + \sum_{j=1}^{m} \bar{p}_j \bar{R}_j. \tag{5}$$

Рассмотрим фундаментальное решение уравнения (I), которое удовлетворяет следующему уравнению:

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{I} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \underset{\sim}{I} \operatorname{grad} p^*) - \operatorname{div} \underset{\sim}{N} \operatorname{grad} p^* = L p^* = - \delta_\xi , \tag{6}$$

где $p^* = p^*(t^i, t^i_\xi)$ - фундаментальное решение уравнения (I), $\delta_\xi = \delta(t^i, t^i_\xi)$ - функция Дирака.

Подставляя в (5) $\bar{p} = p^* \bar{K}$, согласно фундаментальному решению (6) получим интегральное уравнение прямого метода граничных элементов

$$c \bar{\tau}(t^i_\xi) = \int_{\Gamma^*} [p^* Q \bar{\tau} - \frac{\partial p^*}{\partial n} T \bar{\tau} + T p^* \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial n} - Q p^* \bar{\tau}] d\gamma - \sum_{j=1}^{m} p^*_j \bar{R}_j , \tag{7}$$

где $C = I$, $\forall \xi \in \Omega^*$; $C = I/2$, $\forall \xi \in \Gamma^*$ /I2/; $\bar{K}$ - произвольный постоянный вектор.

5. При рассмотрении функции Грина для уравнения (6) в некоторой произвольной области Π^* с произвольными краевыми условиями на K^* также получается интегральное уравнение (7).

Здесь Π^* - область, полученная из области Ω^* дополнением до простейшей односвязной, для которой функция Грина получена и несложно вычисляется; K^* - граница области Π^*, на которой заданы некоторые краевые условия для функции Грина. Отметим, что краевые условия на K^* могут быть произвольными, лишь бы при них просто вычислялась функция Грина и обеспечивалась хорошая устойчивость вычислений.

6. В случае многосвязных областей параметров в выражения (2) (4), (7) войдут дополнительные члены с контурными интегралами по внутренним линиям Γ_j^*, $j = 1,2,\ldots, n$, где n - количество внутренних линий.

7. На основе выражений (2), (3), (4), (7) возможны различные приближенные аналитические и численные методы построения или аппроксимации поверхностей оболочечных конструкций в зависимости от того, в каком виде задана исходная информация о поверхности и какой метод применяется для решения задачи прочности. При применении аналитических методов необходимо задать значения радиуса-вектора $\bar{r}(t^i)$, $\forall(t^i)\in\Omega^*$ в виде известных рядов с неопределенными коэффициентами, определяемыми из условий стационарности функционалов (2), (3) или уравнений метода Бубнова-Галеркина, которые следуют из тождества (4).

Фундаментальные решения (6) для случая $\underset{\sim}{I}(t^i) = const$, $\underset{\sim}{N}(t^i) = const$ получены /13/, и из уравнения (7) следует наиболее точный и эффективный алгоритм. Метод граничных элементов в варианте метода подструктур позволяет принять $\underset{\sim}{I}(t^i)$, $\underset{\sim}{N}(t^i)$ в виде кусочно постоянных функций в пределах каждой подструктуры. В результате существенно расширяется область применения метода граничных элементов, в том числе для аппроксимации наиболее сложных составных поверхностей.

Применяя для аппроксимации $\bar{r}(t^i)$ в (2), (3), (4) кусочно-полиномиальные функции, получим систему линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов для нахождения узловых значений $\bar{r}(t_p^i)$, $\partial\bar{r}(t_p^i)/\partial t^1$, $\partial\bar{r}(t_p^i)/\partial t^2$, $p = 1,2,\ldots, m$, где m - количество узлов расчетной сетки конечных элементов в области Ω^* /11/.

8. При построении аппроксимирующего сплайна на основе интегрального тождества к (4) необходимо добавить интегральное тождество для выбранного оператора аппроксимации. При построении аппроксимирующего сплайна на основе метода граничных элементов к (7)

необходимо добавить условие минимума среднеквадратичного отклонения по аналогии с (3).

9. Если краевые условия не заданы, то их необходимо вычислить. Наиболее общий метод вычисления краевых условий для любого из выражений (2), (3), (4), (7) может быть построен на основе принципа минимума суммы квадратов „реакций" сплайна.

IO. При аппроксимации геометрий однослойных и многослойных оболочек переменной толщины применимы следующие два представления для радиуса-вектора произвольной точки рассматриваемого слоя:

$$\bar{r}(t^i,t)=\bar{r}_k\frac{(t-t_{k+1})}{(t_k-t_{k+1})}\left[1-\frac{t-t_k}{(t_c-t_k)+(t_c-t_{k+1})}\right]+ \\ +\bar{r}_{k+1}\frac{(t-t_k)}{(t_{k+1}-t_k)}\left[1-\frac{t-t_{k+1}}{(t_c-t_k)+(t_c-t_{k+1})}\right]+ \\ +\bar{r}'_c\frac{(t-t_k)(t-t_{k+1})}{(t_c-t_k)+(t_c-t_{k+1})}, \tag{8}$$

$$\bar{r}(t^i,t)=\bar{r}_k\frac{(t_{k+1}-t)^2[2(t-t_k)+d_k]}{d_k^3}+ \\ +\bar{r}_{k+1}\frac{(t-t_k)^2[2(t_{k+1}-t)+d_k]}{d_k^3}+ \\ +\bar{r}'_k\frac{(t_{k+1}-t)^2(t-t_k)}{d_k^2}-\bar{r}'_{k+1}\frac{(t-t_k)^2(t_{k+1}-t)}{d_k^2}, \tag{9}$$

$$\forall t\in[t_k,t_{k+1}],\quad k=1,2,\dots,n\ ,$$

где n - число слоев многослойной оболочки; t - выбираемый расчетчиком параметр, соответствующий третьей координатной линии; $\bar{r}'_k=\partial\bar{r}(t^i,t_k)/\partial t$ - пока неизвестный вектор; $d_k=t_{k+1}-t_k$, $k=1,2,\dots,n$ - толщина слоев в области изменения параметров.

Для многослойных оболочек коэффициенты $\bar{r}'_c$, $\bar{r}'_k$, $\bar{r}'_{k+1}$ в (8), (9) могут быть вычислены методом векторных конечных разностей или в результате построения векторно-параметрического кубического сплайна /I4/ по параметру t .

Для однослойных оболочек в (8), (9) естественно принять следующие выражения для векторов:

$$\bar{r}'_s=\left[\frac{\partial\bar{r}_s}{\partial t^1}\times\frac{\partial\bar{r}_s}{\partial t^2}\right],\quad s=k,\ k+1\ ; \tag{IO}$$

$$\bar{r}'_c = \left[\frac{\partial}{\partial t^1} \left(\frac{\bar{r}_{k+1} + \bar{r}_k}{2} \right) \times \frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{\bar{r}_{k+1} + \bar{r}_k}{2} \right) \right], \tag{11}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$.

При необходимости можно ввести в рассмотрение векторы единичных нормалей $(\bar{n})_\ell$ соответствующих поверхностей ℓ и приравнять их к производным по параметру t согласно выражениям

$$\bar{r}'_s = (\bar{n})_s, \quad s = k,\ k+1; \quad \bar{r}'_c = (\bar{n})_c. \tag{12}$$

Далее, в результате применения гипотез теории многослойных оболочек и соотношений теории упругости следует система параметрических дифференциальных уравнений деформирования в криволинейных координатах. Выражения (8), (9) полностью определяют геометрию однослойной или многослойной оболочки.

Литература

I. Осипов В.А. Машинные методы проектирования непрерывно-каркасных поверхностей. - М.: Машиностроение, I979. - 248 с.

2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. - М.: Наука, I976. - 5I2 с.

3. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов.- М.: Наука, I978. - 296 с.

4. Норден А.П. Теория поверхностей. - М.: Гостехиздат, I956. - 260 с.

5. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. - Новосибирск: Наука, I983. - 2I6 с.

6. Гребенников А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. - М.: Издательство Московского университета, I983. - 208 с.

7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, I977. - 456 с.

8. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, I980. - 352 с.

9. Снигирев В.Ф. К задаче вычисления параметров пологой оболочки. - В кн.: Вопросы расчета прочности конструкций летательных аппаратов. - Казань: Казанский авиационный институт, I982,с.84-86.

I0. Снигирев В.Ф. Вычисление параметров срединной поверхности оболочек сложной геометрии вариационными методами сплайн-функций.-

В кн.: Всесоюзная конференция „Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов". Тезисы докладов. – М.: Московский авиационный институт, 1983, с. 34.

11. Снигирев В.Ф. К задаче аналитического построения поверхностей летательных аппаратов. – Известия Вузов, Авиационная техника, 1983, № 4, с.100–102.

12. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1982. – 248 с.

13. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 496 с.

14. Снигирев В.Ф. К задаче построения рабочей поверхности пуансона гибочной оснастки. – В кн.: Пластическое формообразование деталей авиационной техники. – Казань: Казанский авиационный институт, 1983, с. 80–85.

УДК 629.7.015.4:539.3

В.Б.Карякин, Х.С.Хазанов

ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ПОДКРЕПЛЕНИЕМ КРУГЛОГО ВЫРЕЗА

В /1,2/ рассмотрена задача о подкреплении выреза в цилиндрической оболочке кольцом переменного сечения. Необходимость ее решения возникает в следующих случаях – при стремлении либо снизить массу подкрепления при заданном максимальном уровне напряжений в конструкции, либо уменьшить уровень концентрации напряжений при заданной массе кольца путем перераспределения его материала.

Наиболее технологичным является подкрепление постоянной толщины. Переменности сечения можно достигнуть путем изменения формы внешней границы кольца, а также формы выреза, если это допустимо с точки зрения требований, предъявляемых к конструкции. В /1/ приведены результаты расчетов для случая эллиптического выреза и круговой формы внешней границы кольца. В настоящей статье представлен анализ исследований влияния на напряженно-деформированное состояние оболочки изменения формы внешней границы подкрепления круглого выреза.

Подкрепляющее кольцо может быть по-разному расположено относительно срединной поверхности оболочки. Рассмотрены три случая – когда общими являются срединные, наружные или внутренние поверх-