

ного уравнения несимметричного изгиба сферической оболочки // Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сб. - Куйбышев: Куйбышев. авиац. ин-т, 1975. - Вып. 2. - С. 56-62.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. - М.: Наука, 1965. - 296 с.

6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Гос-техиздат, 1953. - 468 с.

УДК 539.3

Б.А.Горлач, Е.А.Ефимов

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЖЕСТКИХ ПОВОРОТОВ
НА РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК

Исходя из того, что предполагается исследование процессов деформирования оболочек вращения при конечных неупругих перемещениях и поворотах, к их решению привлечены зависимости между индифферентными тензорами. В геометрических соотношениях удержаны квадраты градиентов (∇) вектора перемещения u . Физические соотношения представлены в виде ассоциированного закона пластического течения, устанавливающего зависимость между приращениями тензора деформации Генки и тензором напряжения Коши t . Уругопластическое состояние описывается условием Мизеса с трансляционным и изотропным упрочнением.

Алгоритм задачи строится на базе вариационного уравнения Лагранжа /1/, которое с расчетом на применение шагового метода нагружения преобразовано к метрике некоторого известного (найденного на предыдущем шаге) промежуточного состояния, характеризуемого объемом V и поверхностью w /2/:

$$\begin{aligned} & \int_V t : \nabla \delta u \, dv - \int_w t_n \cdot \delta u \, dw = \\ & = - \int_V \nabla u : {}^{(4)}m : \nabla \delta u \, dv + \int_w (\nabla u : {}^{(4)}m \cdot n) \cdot \delta u \, dw. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t_n - вектор сил, распределенных по поверхности с единичной нормалью n ; ${}^{(4)}m$ - тензор четвертого ранга, сложным образом выражающийся через параметры, характеризующие уругопластические свойства материала, историю нагружения, а также достигну-

тые напряжения, деформации и их приращения /2/.

Отличительной чертой применяемого алгоритма является то, что в вариационном уравнении используются лагранжевы координаты (тензоры деформации и напряжения записаны в базисе конечного состояния). Конфигурация тела и другие функции уточняются в процессе итераций на каждом шаге нагружения. Для сходящегося процесса невязка решения (правая часть уравнения (I)) стремится к нулю. Благодаря этому в конце каждого шага нагружения получается решение, описывающее деформированное состояние тела.

При составлении алгоритма решения задач используется метод конечных элементов. При этом благодаря записи вариационного уравнения в тензорной форме переход от него к соответствующим матричным уравнениям МКЭ осуществляется выполнением формальных операций. Например, первое слагаемое правой части вариационного уравнения представляется в виде

$$\int_V \nabla u_i^{(j)} : m : \nabla \delta u_i^{(j)} dV = \sum_{(j)} \delta W_{(j)}^q \sum_{(i)} W_{(i)}^p \int_V (\nabla_k \Phi^{(i)})_{pk}^n m_{nl}^{ks} (\nabla_s \Phi^{(j)})_{qs}^e dV.$$

Здесь $W_{(j)}^q$ - перемещение j -го узла в направлении лагранжевой координаты ξ^q ; $\Phi^{(i)}$ - аппроксимирующая функция для i -го узла (в остальных узлах ее значение равно нулю); m_{nl}^{ks} - физические компоненты тензора ${}^{\omega}m$ в рассматриваемой системе координат; ∇_k - оператор, связанный с ковариантной производной от тензора. Индексы, взятые в скобки, относятся к узловым точкам системы конечных элементов, и по ним производится суммирование по всей совокупности узлов. Остальные индексы характеризуют тензорный признак функций, и суммирование по ним производится по правилам тензорной алгебры.

Для решения задач используется лагранжев изопараметрический девятиузловой кольцевой конечный элемент, представленный в цилиндрической системе координат.

На базе описанного алгоритма составлена программа для ЭВМ, позволяющая решать различные задачи устойчивости, формообразования и определения напряженно-деформированного состояния (НДС) осесимметричных тел. В частности, исследована устойчивость защемленного по контуру и нагруженного равномерным давлением p сферического сегмента. Величина давления на шаге нагружения выбирается такой, чтобы максимальное перемещение оболочки не превышало $0,025 + 0,1$ ее толщины h , что позволяет проследить путь нагружения как до, так и после потери устойчивости. При этом используется алгоритм определения приращений нагрузок по функциям, экстраполирующим в

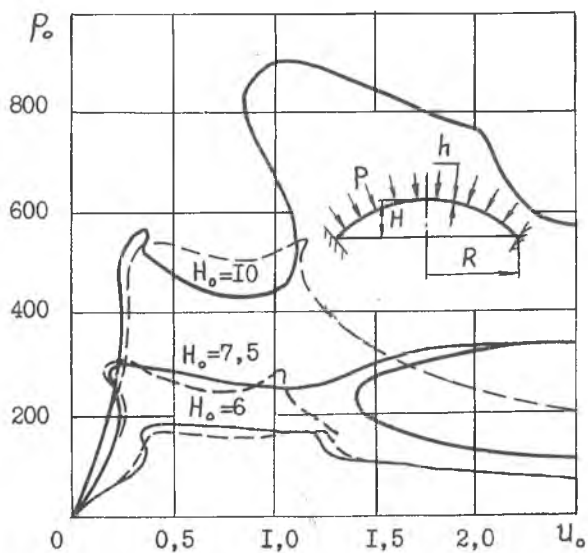


Рис. 1

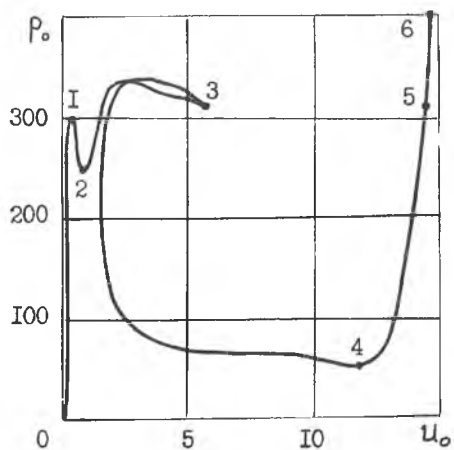


Рис. 2

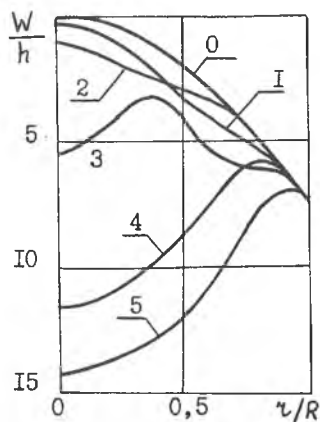


Рис. 3

квадратичном приближении зависимость p от максимальных перемещений u_{\max} .

В качестве исходного приближения на каждом очередном шаге нагружения используется поле перемещений с предыдущего шага. Таким образом, для найденного давления задается новая конфигурация и соответствующие ей функции, которые затем уточняются в итерационном процессе. После решения задачи на очередном шаге находится новое поле перемещений и новое значение давления, позволяющие перейти к дальнейшему нагружению оболочки. Предложенный алгоритм позволяет проследить моменты перехода функции $p(u)$ через экстремальные точки.

На рис.1 показана зависимость безразмерного давления $P_0 = p a^4 / E h^4$ от относительного прогиба $u_0 = W_0 / h$ центра сегмента для трех значений относительной высоты $H_0 = H / h$. Размеры сегмента показаны на рис.1. Расчет проводился для упругой оболочки с модулем упругости E . Пунктирами показаны результаты решения, полученные В.И.Феодосьевым в работе /3/. Для куполов со значениями относительных высот $H_0 \leq 4$ решение по рассматриваемому алгоритму и по /3/ совпадает. Нарастающее с ростом перемещений расхождение в результатах двух решений для оболочек с $H_0 > 4$ объясняется учетом в предлагаемом алгоритме жестких поворотов элементов оболочки (соблюдение принципа индифферентности) при записи определяющих уравнений. На рис.2 вынесен отдельно график $P_0 - u_0$ для купола с $H_0 = 7,5$, а на рис.3 показаны положения оболочки, соответствующие некоторым характерным точкам этого графика.

Следует отметить, что при реализации решения на ЭВМ непрерывный процесс нагружения по описанной процедуре нарушался в точке 3 (рис.2), где решение "перескакивало" на устойчивую ветвь диаграммы в точку 5. Полное решение получалось при движении сначала по кривой 01235 и затем по 54356.

Л и т е р а т у р а

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. - М.: Наука, 1980. - 512 с.

2. Горлач Б.А. и др. Математическое моделирование процессов формообразования деталей / Б.А.Горлач, Е.А.Вфимов, Н.Н.Орлов // ЖПМТФ. - 1985. - № 3. - С. 148-152.

3. Феодосьев В.И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем//ПММ.-1963.-Т.27, вып.2.-С.265.