УДК 539.3

Ю.Э.Сеницкий

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ПОСТАНОВКЕ ТЕОРИИ ТИПА ТИМОШЕНКО

Применение теории типа Тимошенко в задачах динамики пластин и оболочек позволяет расширить рамки классической моментной теории, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява. Действительно, в результате учета деформаций сдвига и инерции вращения разрешающая система уравнений становится гиперболической и оказывается возможным исследование переходных волновых процессов указанных систем, уточнение высокочастотного спектра их колебаний, определение напряженно-деформированного состояния при относительно больших толщинах и динамических нагрузках, вызывающих значительные градиенты переменных во времени полей. Обстоятельный обзор работ по неклассическим теориям динамики стержней, пластин и оболочек с всесторонним анализом моделей, методов решения и полученных результатов приведен в /I/.

В настоящей статье на основе разработанной автором структурной схемы метода конечных интегральных преобразований (КИП) /2/ приводится замкнутое решение осесимметричной задачи динамики для круговой в плане пологой сферической оболочки в постановке теории Тимошенко. Рассмотрен необычный случай закрепления, при котором контур оболочки жестко заделан в податливое основание, совершающее заданное движение (кинематическое возмущение).

Следует отметить, что предлагаемый метод в отличие от обычной процедуры разложения по собственным функциям /3/ позволяет определить все компоненты общего решения, включая обобщенное соотношение ортогональности, без какой-либо априорной информации и не требует предварительного приведения краевой задачи к стандартной форме /4/. В отличие же от результатов, полученных путем преобразования Лапласа при асимптотических методах обращения /5/, настоящее решение справедливо для любых произвольных моментов времени.

I. Используем общие уравнения уточненной теории /6/ с учетом обычных допущений, справедливых для тонких упругих пологих

...лочек. При этом считаем, что изменения кривизн изгиба и круче... не зависят от тангенциальных перемещений, и пренебрегаем де...ормациями сдвига в уравнении движения, представляющем проекцию ...сательную к меридиану. Дифференциальные уравнения движения, ...альные и граничные условия для рассматриваемой краевой задачи ...рмулируются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\ldots \psi + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}u + \beta(1+\nu)\frac{\partial W}{\partial r} = 0, \\
\ldots\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r}\psi\right) + \beta(1+\nu)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}u\right) - \\
\ldots(1+\alpha^2\beta^2)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -z(r,t), \\
\ldots\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\psi\right) + K^2\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \psi\right) - \alpha^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0
\end{gathered}
\qquad (1)
$$

$$
\begin{gathered}
W\big|_{t=0} = W_0(r), \quad \frac{\partial}{\partial t}W\big|_{t=0} = \dot{W}_0(r) \quad \text{при } t=0 \\
\psi\big|_{t=0} = \psi_0(r), \quad \frac{\partial}{\partial t}\psi\big|_{t=0} = \dot{\psi}_0(r)
\end{gathered}
\qquad (2)
$$

$$
\begin{gathered}
u(1,t) = u_1(t), \quad W(1,t) = W_1(t), \quad \psi(1,t) = \psi_1(t) \quad \text{при } r = 1 \\
u(0,t) < \infty, \quad W(0,t) < \infty, \quad \psi(0,t) < \infty \quad \text{при } r = 0.
\end{gathered}
\qquad (3)
$$

Здесь $u(r,t)$, $W(r,t)$, $\psi(r,t)$ – соответственно безразмер...ые тангенциальная и нормальная компоненты вектора перемещений, ...несенные к радиусу оболочки в плане „a", и угол поворота нор...али сечения в меридиональной плоскости; $z(r,t) = \frac{a(1-\nu^2)z^*}{Eh}$ – без...азмерная осесимметричная динамическая нагрузка; $r = r^*/a$, ...$\frac{t^*}{a}\left[\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\right]^{-1}$ – соответственно безразмерные радиальная коор...дината и время; $u_1(t)$, $W_1(t)$, $\psi_1(t)$ – заданные безразмерные функ...ции, определяющие соответствующие перемещения контура оболочки; $W_0(r)$, $\psi_0(r)$, $\dot{W}_0(r)$, $\dot{\psi}_0(r)$ – известные в начальный момент време...ни безразмерные перемещения и скорости перемещений;

$$\alpha^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{h}{a}\right)^2, \quad \beta = \frac{a}{R}, \quad K^2 = \frac{K_1(1-\nu)}{2};$$

R , h – радиус кривизны и толщина оболочки; E , ν , ρ – мод[уль] Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала; K_1 – коэффици[ц]ент сдвига.

Звездочкой отмечены аналогичные размерные величины. Уравне[ния] (30) составлены без учета меридиональной силы инерции.

Введем вырожденное КИП на сегменте $[0,1]$

$$\varphi(\lambda_i,t)=\int_0^1 r[BW(r,t)K_2(\lambda_i r)+c\psi(r,t)K_3(\lambda_i r)]dr$$

$$u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda_i,t)K_1(\lambda_i r)}{\|G_i\|^2};\quad W(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda_i,t)K_2(\lambda_i r)}{\|G_i\|^2};\quad \psi(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi(\lambda_i,t)K_3(\lambda_i r)}{\|G_i\|^2}, \tag{4}$$

где

$$\|G_i\|^2=\int_0^1 r[BK_1^2(\lambda_i r)+cK_3^2(\lambda_i r)]dr. \tag{5}$$

Формулы обращения (4) справедливы при выполнении такого соо[т]ношения ортогональности /2/:

$$\int_0^1 r[BK_2(\lambda_i r)K_2(\lambda_j r)+cK_3(\lambda_i r)K_3(\lambda_i r)]dr=\delta_i^j\|G_i\|.$$

Существенным является то, что прямое преобразование и форм[у]лы обращения (4) содержат различное число компонент ядра КИП. В[се] составляющие введенной структуры (4) определяются ниже в процес[се] решения задачи.

Применяем прямое КИП (4) по переменной „ r " к дифференциальным уравнениям (I) и начальным условиям (2), используя алгоритм, предложенный в /2/. Это значит, что умножаем первое уравнение (I) на $frK_1(\lambda_i r)$, второе и первые два равенства (2) на $BrK_2(\lambda_i r)$, а третье и оставшиеся начальные условия (2) на $crK_3(\lambda_i r)$. Выполняя затем интегрирование в интервале $[0,1]$ и складывая полученные соотношения, приходим к счетной системе задач Коши для трансформанты $\varphi(\lambda_i,t)$. Имеем:

$$\ddot{\varphi}(\lambda_i,t)+\lambda_i^2\varphi(\lambda_i,t)=q(\lambda_i,t);\qquad i=\overline{1,\infty}$$

$$\varphi|_{t=0}=\varphi_0(\lambda_i),\quad \dot{\varphi}|_{t=0}=\dot{\varphi}_0(\lambda_i).$$

Здесь λ_i – безразмерные круговые частоты осесимметричных колебаний оболочки:

$$(\lambda_i,t)=\int_0^1 r\,z(r,t)\,b(1+\alpha^2\beta^2)^{-1}K_2(\lambda_i r)\,dr-[u_1(t)fK_1'(\lambda_i r)+$$

$$w_1(t)\kappa^2 b(1+\alpha^2\beta^2)^{-1}K_2'(\lambda_i r)+\psi_1(t)c(1+1{,}8\alpha^2\beta^2)^{-1}K_3'(\lambda_i r)]\Big|_{r=1}, \quad (9)$$

$$(\lambda_i),\dot\psi_0(\lambda_i)\}=\int_0^1 r[b\{W_0(r),\psi_0(r)\}K_2(\lambda_i r)+c\{\dot W_0(r),\dot\psi_0(r)\}K_3(\lambda_i r)]\,dr.$$

В процедуре сведения (I), (2) к (7), (8) применялось интегрирование по частям, использовались равенства (3) и соответствующие однородные граничные условия

$$K_1(\lambda_i)=0,\quad K_2(\lambda_i)=0,\quad K_3(\lambda_i)=0 \qquad \text{при} \quad r=1$$
$$K_1(0)<\infty,\quad K_2(0)<\infty,\quad K_3(0)<\infty \qquad \text{при} \quad r=0, \quad (\text{I0})$$

также операционное свойство /2/:

$$\int\{u[f(K_1''+\frac{1}{r}K'-\frac{1}{r^2}K)-\frac{\beta(1+\nu)}{1+\alpha^2\beta^2}K_2']+W[\frac{b}{1+\alpha^2\beta^2}(\kappa^2K_2''+\frac{\kappa^2}{r}K_2'+$$

$$2\beta^2(1+\nu)K_2)-f\beta(1+\nu)(K_1'+\frac{1}{r}K_1)-\frac{c\kappa^2}{\alpha^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2)}(K_3'+\frac{1}{r}K_3)]+$$

$$\psi[\frac{b\kappa^2}{1+\alpha^2\beta^2}K_2'+\frac{c}{1+1{,}8\alpha^2\beta^2}(K_3''+\frac{1}{r}K_3'-\frac{1}{r^2}K_3-\frac{\kappa^2}{\alpha^2}K_3)]\}\,r\,dr=$$

$$-\lambda_i^2\int_0^1(WbK_2+\psi cK_3)\,r\,dr. \quad (\text{II})$$

Общее решение системы (7), (8) записывается в виде

$$(\lambda_i,t)=\psi_0(\lambda_i)\cos\lambda_i t+\dot\psi_0(\lambda_i)\frac{1}{\lambda_i}\sin\lambda_i t+\frac{1}{\lambda_i}\int_0^t q(\lambda_i,\tau)\sin\lambda_i(t-\tau)\,d\tau. \quad (\text{I2})$$

Размерные частоты колебаний ω_i связаны с λ_i зависимостью

$$\omega_i=\lambda_i\frac{1}{a}\left[\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}\right]^{1/2}. \quad (\text{I3})$$

Учитывая независимость функций u, W и ψ, из соотношения (II) получим такую систему уравнений для K_1, K_2, K_3:

$$[K_1''(\lambda_i r)+\frac{1}{r}K_1'(\lambda_i r)-\frac{1}{r^2}K_1(\lambda_i r)]-\frac{\beta(1+\nu)}{1+\alpha^2\beta^2}bK_2'(\lambda_i r)=0,$$

$$\frac{b}{\alpha^2\beta^2}\{\kappa^2K_2''(\lambda_i r)+\frac{\kappa^2}{r}K_2'(\lambda_i r)+[2\beta^2(1+\nu)+\lambda_i^2(1+\alpha^2\beta^2)]K_2(\lambda_i r)\}-$$

$$-f\beta(1+\nu)\left[K_1'(\lambda_i r)+\frac{1}{r}K_1(\lambda_i r)\right]-\frac{cK^2}{\alpha^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2)}\left[K_3'(\lambda_i r)+\frac{1}{r}K_3(\lambda_i r)\right]=0,$$

$$\frac{c}{1+1{,}8\alpha^2\beta^2}\left\{K_3''(\lambda_i r)+\frac{1}{r}K_3'(\lambda_i r)-\left[\frac{1}{r^2}+\frac{K^2}{\alpha^2}-\lambda_i^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2)\right]K_3(\lambda_i r)\right\}+ \quad (\mathrm{I}$$

$$+\frac{bK^2}{1+\alpha^2\beta^2}K_2'(\lambda_i r)=0.$$

Используя условие инвариантности /2/ исходной (I) и преоб[р]зованной (I4) систем уравнений при соответствиях $u\sim K_1$, $W\sim K_2$, $\psi\sim K_3$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sim-\lambda_i^2$, определяем коэффициенты f, b, c весов[ых] функций КИП (4). Имеем

$$f=-1,\quad b=1+\alpha^2\beta^2,\quad c=\alpha^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2). \quad (\mathrm{I}$$

Следует отметить, что лишь при удовлетворении равенств (I5) собственные функции K_1, K_2, K_3 однородной краевой задачи для ядра КИП (I4), (I0) удовлетворяют обобщенному соотношению ортого[]нальности (6). В дальнейшем будем учитывать формулы (I5)[ж)]. Пер[е]ходим к решению системы (I4), (I0).

Дифференцируя второе уравнение (I4), составляем выражение для $(K_1''+r^{-1}K_1'-r^{-2}K_1)$, после подстановки которого в первое равенство (I4) устанавливаем связь между K_3'', K_3', K_3 и K_2''', K_2'', K_2'. Используя затем третье уравнение (I4), находим K_2', а затем и производные K_2'', K_2'''. Подставляя K_2', K_2'', K_2''' в пред[ы]дущее равенство, приходим к следующему дифференциальному уравнению IУ-го порядка с переменными коэффициентами:

$$K_3^{IV}+\frac{2}{r}K_3'''+\left(a_{1i}-\frac{3}{r^2}\right)K_3''+\left(a_{1i}+\frac{3}{r^2}\right)\frac{1}{r}K_3'-\left(a_{2i}+\frac{a_{1i}}{r^2}+\frac{3}{r^4}\right)K_3=0, \quad (\mathrm{I}6)$$

где

$$a_{1i}=(1+1{,}8\alpha^2\beta^2)\lambda_i^2+\left[(1+\alpha^2\beta^2)\lambda_i^2+\beta^2(1-\nu^2)\right]K^{-2}$$

$$a_{2i}=\left[(1+\alpha^2\beta^2)\lambda_i^2+\beta^2(1-\nu^2)\right]\left[K^2\alpha^{-2}-\lambda_i^2(1-1{,}8\alpha^2\beta^2)\right]K^{-2}. \quad (\mathrm{I}$$

ж) Таким образом, метод КИП в отличие от обычной процедуры ра[з]деления переменных располагает дополнительными конструктивными возможностями в части определения коэффициентов весовых функций и соотношения ортогональности.

Уравнение (I6) допускает коммутативную факторизацию, т.е.

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\left(A_i^2-\frac{1}{r^2}\right)\right]\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\left(D_i^2+\frac{1}{r^2}\right)\right]K_3(\lambda_i r)=0.$$

Здесь

$$A_i=\left[\frac{1}{2}a_{1i}+\left(\frac{1}{4}a_{1i}^2+a_{2i}\right)^{1/2}\right]^{1/2},\quad D_i=\left[-\frac{1}{2}a_{1i}+\left(\frac{1}{4}a_{1i}^2+a_{2i}\right)^{1/2}\right]^{1/2}. \qquad (I8)$$

Приравнивая нулю каждый сомножитель, получаем обычное и видоизмененное уравнения Бесселя. Учитывая условия ограниченности (I0), общий интеграл (I6) определяем таким выражением:

$$K_3(\lambda_i r)=C_1(\lambda_i)J_1(A_i r)+C_3(\lambda_i)I_1(D_i r), \qquad (I9)$$

где J_1, I_1 – обычная и модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка.

Подставляя теперь (I9) в третье уравнение системы (I4), разрешая его относительно K_2' и интегрируя, находим

$$K_2(\lambda_i r)=C_1(\lambda_i)\frac{a_{3i}}{A_i}J_0(A_i r)+C_3(\lambda_i)\frac{a_{4i}}{D_i}I_0(D_i r)+C_5(\lambda_i). \qquad (20)$$

Здесь

$$a_{3i}=[\alpha^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2)\lambda_i^2-A_i^2\alpha^2-K^2]K^{-2}$$

$$a_{4i}=[K^2-D_i^2\alpha^2-\alpha^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2)\lambda_i^2]K^{-2}. \qquad (2I)$$

Располагая (I9), (20), из второго равенства (I4) получаем следующее дифференциальное уравнение относительно K_1 :

$$K_1'(\lambda_i r)+\frac{1}{r}K_1(\lambda_i r)=C_1(\lambda_i)a_{5i}J_0(A_i r)+C_3(\lambda_i)a_{6i}I_0(D_i r)+C_5(\lambda_i)a_{7i},$$

где

$$a_{5i}=\{K^2A_i(1+a_{3i})-A_i^{-1}a_{3i}[2\beta^2(1+\nu)+(1+\alpha^2\beta^2)\lambda_i^2]\}[\beta(1+\nu)]^{-1},$$

$$a_{6i}=\{K^2D_i(1-a_{4i})-D_i^{-1}a_{4i}[2\beta^2(1+\nu)+(1+\alpha^2\beta^2)\lambda_i^2]\}[\beta(1+\nu)]^{-1},$$

$$a_{7i}=-[2\beta^2(1+\nu)+(1+\alpha^2\beta^2)\lambda_i^2][\beta(1+\nu)]^{-1}. \qquad (22)$$

Интегрируя последнее уравнение при условии ограниченности

(I0), окончательно получаем:

$$K_1(\lambda_i r)=C_1(\lambda_i)\frac{a_{5i}}{A_i}J_1(A_i r)+C_3(\lambda_i)\frac{a_{6i}}{D_i}I_1(D_i r)+C_5(\lambda_i)\frac{a_{7i} r}{2}.$$

Подстановка равенств (I9), (20), (23) в оставшиеся граничные условия (I0) при r = I формирует такую однородную систему алгебраических уравнений для C_1, C_3, C_5:

$$\begin{bmatrix} a_{5i}A_i^{-1}J_1(A_i) & a_{6i}D_i^{-1}I_1(D_i) & 0{,}5a_{7i} \\ a_{3i}A_i^{-1}J_0'(A_i) & a_{4i}D_i^{-1}I_0(D_i) & 1 \\ J_1(A_i) & I_1(D_i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(\lambda_i) \\ C_3(\lambda_i) \\ C_5(\lambda_i) \end{bmatrix} = 0. \tag{24}$$

Из условия нетривиальности решения системы (24) составляем трансцендентное уравнение для определения собственных значений $\lambda_i\ (i=\overline{1,\infty})$:

$$\frac{a_{7i}}{2}\left[\frac{a_{3i}}{A_i}J_0(A_i)I_1(D_i)-\frac{a_{4i}}{D_i}I_0(D_i)J_1(A_i)\right]-\left(\frac{a_{5i}}{A_i}-\frac{a_{6i}}{D_i}\right)J_1(A_i)I_1(D_i)=0. \tag{25}$$

Из последних двух равенств (24) выражаем C_1, C_5 через C_3. Без ограничения общности принимая затем $C_3(\lambda_i)=J_1(A_i)$, получаем следующие выражения компонент ядра КИП (4) и квадрата нормы (5):

$$K_1(\lambda_i r)=A_i^{-1}I_1(D_i)[0{,}5a_{3i}a_{4i}rJ_0(A_i)-a_{5i}J_1(A_i r)]-D_i^{-1}J_1(A_i)\times$$

$$\times[0{,}5a_{4i}a_{7i}rI_0(D_i)-a_{6i}I_1(D_i r)];$$

$$K_2(\lambda_i r)=a_{4i}D_i^{-1}J_1(A_i)[I_0(D_i r-I_0(D_i)]-a_{3i}A_i^{-1}I_1(D_i)[J_0(A_i r)-J_0(A_i)],$$

$$K_3(\lambda_i r)=J_1(A_i)I_1(D_i r)-I_1(D_i)J_1(A_i r), \tag{26}$$

$$\|G\|^2=b_{1i}J_1^2(A_i)I_0^2(D_i)+b_{2i}I_1^2(D_i)J_0^2(A_i)+b_{3i}J_1^2(A_i)I_1^2(D_i)+b_{4i}J_1^2(A_i)\times$$

$$\times I_0(D_i)I_1(D_i)+b_{5i}I_1^2(D_i)J_0(A_i)J_1(A_i)+b_{6i}J_0(A_i)J_1(A_i)I_0(D_i)I_1(D_i). \tag{27}$$

Здесь

$$b_{1i}=a_{4i}^2D_i^{-2}(1+\alpha^2\beta^2)-0{,}5\alpha^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2),$$

$$b_{2i}=a_{3i}^2A_i^{-2}(1+\alpha^2\beta^2)+0{,}5\alpha^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2),$$

$$b_{3i}=0{,}5(1+\alpha^2\beta^2)(a_{3i}^2A_i^{-2}-a_{4i}^2D_i^{-2})+\alpha^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2),$$

$$b_{4i}=2a_{4i}D_i^{-1}(1+\alpha^2\beta^2)[a_{3i}(A_i^2+D_i^2)^{-1}-a_{4i}D_i^{-2}-a_{3i}A_i^{-2}]+\alpha^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2)\times$$
$$\times(A_i^2-D_i^2)(A_i^2+D_i^2)^{-1}D_i^{-1},$$

$$b_{5i}=2a_{3i}A_i^{-1}(1+\alpha^2\beta^2)[a_{4i}(A_i^2+D_i^2)^{-1}-a_{4i}D_i^{-2}-a_{3i}A_i^{-2}]+\alpha^2(1+1{,}8\alpha^2\beta^2)\times$$
$$\times(A_i^2-D_i^2)(A_i^2+D_i^2)^{-1}A_i^{-1},$$

$$b_{6i}=a_{3i}a_{4i}A_i^{-1}D_i^{-1}(1+\alpha^2\beta^2).$$

Разложения (4) с учетом равенств (I2), (26), (27) и трансцендентного уравнения (25) представляют общее решение рассматриваемой задачи для пологой сферической оболочки при действии по нормали к поверхности произвольной распределенной осесимметричной динамической нагрузки. Действительно, располагая (4), (I2), (25)-(27) по известным формулам

$$M_r(r,t)=-\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\nu}{r}\psi\right),\quad M_\theta(r,t)=-\left(\nu\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\psi}{r}\right),\ Q_r(r,t)=K^2\left(\frac{\partial W}{\partial r}-\psi\right),$$

$$N(r,t)=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\nu}{r}u+\beta(1+\nu)W,\quad N_\theta(r,t)=\nu\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}u+\beta(1+\nu)W,$$

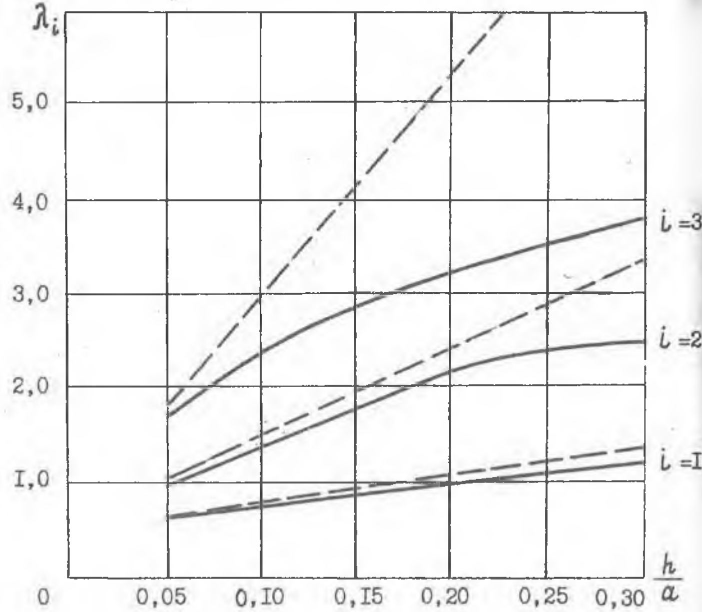
определяем все усилия в срединной поверхности оболочки.

2. В общем решении (4) для каждого конкретного динамического воздействия необходимо задать соответствующее аналитическое выражение $Z(r,t)$ и вычислить интеграл нагрузки, входящий в трансформанту (I2). Проиллюстрируем сказанное на примере загружения оболочки равномерно распределенным по поверхности скачком давления интенсивностью P_o^*. Имеем

$$Z(r,t)=p_o H(t), \tag{28}$$

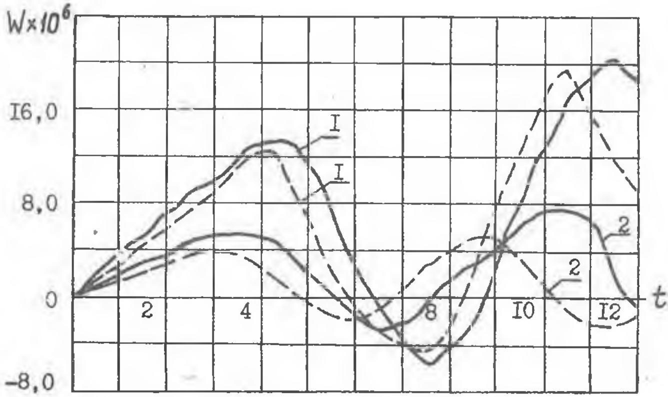
где $P_o=\dfrac{P_o^*a(1-\nu^2)}{Eh}$ – безразмерная интенсивность давления; $H(t)$ – единичная функция О.Хэвисайда.

Для жестко защемленной в неподвижный контур оболочки ($U_1=W_1=\psi_1=0$), находящейся при $t=0$ в покое ($W_o=\psi_o=\dot W_o=\dot\psi_o=0$), из соотношений (I2), (9) после подстановки в них равенств (28),



λ_i
5,0
4,0
3,0
2,0
I,0
0
0,05
0,I0
0,I5
0,20
0,25
0,30
$\frac{h}{a}$
i =3
i =2
i =I

Рис. I



$W \times 10^6$
I6,0
8,0
0
-8,0
2
4
8
I0
I2
t
I
I
2
2

Рис. 2

...) имеем

$$(\lambda_i,t)=\frac{P_0}{\lambda_i}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 r K_2(\lambda_i r)\sin\lambda_i(t-\tau)\,dr\,d\tau=\frac{P_0}{\lambda_i^2}\{a_{4i}D_i^{-1}J_1(A_i)\times$$

$$[D_i^{-1}I_1(D_i)-0{,}5I_0(D_i)]-a_{3i}A_i^{-1}I_1(D_i)[A_i^{-1}J_1(A_i)-0{,}5J_0(A_i)]\}(1-\cos\lambda_i t). \quad (29)$$

Ниже приведены результаты расчетов на ЭВМ круговых частот осесимметричных колебаний и прогибов вершины (r = 0) оболочки при следующих данных: $f_1/2a$ = 0,I5 (f_1 – стрела подъема оболочки), ... = IO^{-6}, a = 20 м, ρ = 8·IO^3 кг/м^3, E = 2·IO^{II} н/м^2, ν = 0,3. Коэффициент сдвига K_1 = 0,86 принят в соответствии с рекомендацией Миндлина /I/. На рис.I приведены графики изменения первых трех частот колебаний λ_1 , λ_2 , λ_3 в зависимости от толщины оболочки h/a . Сплошными линиями на них обозначены кривые, полученные по уравнению (25), а пунктирными – вычисленные на основании моментной технической теории /7/. С увеличением номера частоты растут поправки вследствие учета сдвигов и инерции вращения. Для тонких оболочек ($h/a \leq$ 0,I) расхождения в частотах по обеим теориям несущественны, в то время как для более толстых становятся значительными. Так при h/a = 0,I5 третьи частоты λ_3 отличаются на 47,2%.

Аналогичная картина наблюдается и при анализе прогибов оболочки, изображенных на рис.2. Цифрами I, 2 на нем обозначены соответственно нормальные перемещения в сечении у полюса оболочки, вычисленные при h/a = 0,05 и 0,I5. Сплошными линиями показаны $W(0,t)$, определенные с учетом сдвигов и инерции вращения, а пунктиром – по технической моментной теории /7/. Максимальные перемещения для оболочки с относительной толщиной h/a = 0,I5 (кривые 2) отличаются более чем на 35 %, поэтому как и при определении частот в случае $\frac{h}{a} > 0{,}I$ расчеты следует производить по теории Тимошенко.

В заключение отметим, что если использовать общие выражения (I), (I2), (I9)-(23), то аналогичным путем могут быть получены расчетные соотношения для других условий опирания на контуре.

Литература

I. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНИТИ, Итоги науки и техники. Мех.дефор.тверд. тел, I973, т.5. – 272 с.

2. Сеницкий Ю.Э. Конечные интегральные преобразования в задачах динамики упругих и вязкоупругих систем. – Теоретична и приложна механика, София, 1978, т.9, № 3, с.43-49.

3. Reismann H., Culkowski P. Forced axisymmetric motion of shallow spherical shells.- S.Engineering mech. divis. soc. civil engrs., 1968, v.94, N2, p.653-670.

4. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.

5. Колодяжный А.В., Янютин Е.Г. К расчету начальной осесимметричной реакции пологой сферической оболочки типа Тимошенко при воздействии импульсной нагрузки. – В кн.: Динамика и прочность машин, Харьков, 1972, вып. 15, с.95-99.

6. Naghdi P.M. On the theory of thin elastic shells.-Quart. appl. math., 1957, v.14, N4, p.369-380.

7. Сеницкий Ю.Э. Расчет пологой сферической оболочки на действие произвольной динамической нагрузки. – Прикладная механика, 1968, т.4, вып.4, с.66-74.

УДК 539.3

М.Ф.Гарифуллин, И.С.Селин

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕК

Решение задач динамики оболочек сложной геометрии с учетом подвижности заделки и геометрической нелинейности является достаточно актуальным, так как к этому классу оболочек относятся такие ответственные элементы конструкций, как лопасти винтов, вентиляторов, лопатки турбин и т.д.

Здесь в отличие от оболочек классической геометрии /1/, /2/ коэффициенты квадратичных форм не могут быть вычислены непосредственно, поэтому возникает необходимость в использовании приближенных методов, в частности, известного метода отображения оболочки на некоторую поверхность отсчета, предложенного в работе /./. Этот метод позволяет рассчитывать широкий класс неклассических оболочечных конструкций.