

тивных скоростей, а также для движения корабля при морском волнении использовать уравнения нерегулярной качки с учетом вероятностных характеристик волнения.

Л и т е р а т у р а

1. Данилин В.П. Гироскопические приборы. - М.: Высшая школа, 1965. - 538 с.
2. Павлов В.А., Михайлов С.А. Теория движения лопастей несущего винта при больших перемещениях // ИВУЗ. Авиационная техника. - 1986. - № I. - С. 39.
3. Михайлов С.А. О численной реализации задачи нелинейных упругих колебаний лопастей воздушных винтов. - Рукопись деп. в ВИНТИ 26.01.83, № 447-83.

УДК 629.7.02.534.1

Н.И.Гриненко, В.В.Мокеев

АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Традиционный подход решения задачи вынужденных колебаний вязкоупругих конструкций основывается на разложении решения в ряд по формам собственных колебаний упругой конструкции. В случае, когда деформируемые элементы обладают различными вязкоупругими свойствами, такой подход может оказаться неприменимым, так как собственные формы упругих колебаний не образуют здесь пространства нормальных векторов.

Предлагается использовать пространство нормальных форм, полученных при решении задачи свободных колебаний неоднородной вязкоупругой конструкции. Для дискретизации конструкции используется метод конечных элементов (МКЭ), который позволяет представить неоднородную конструкцию в виде единого тела, состоящего из множества упругих и вязкоупругих конечных элементов. Свойства вязкоупругих элементов описываются в рамках линейной теории вязкоупругости. Используется дифференциальная форма связи напряжений и деформаций. Для изотропного вязкоупругого элемента матрица вязкоупругих операторов определяется двумя дифференциальными операторами, а в случае, когда коэффициент Пуассона (ν) является действительной константой, достаточно использовать один оператор. Связь напряжений и деформации описывается при этом соотношением:

$$\varepsilon = \frac{1}{E^*} D^{-1} \sigma, \quad (1)$$

где ε - вектор деформаций, σ - вектор напряжений, D - матрица упругих констант, E^* - дифференциальный оператор.

В большинстве случаев ограничение $\dot{\nu} = \text{const}$ не является реальным, так как коэффициент Пуассона обычно слабо меняется в процессе деформирования. Это тем более верно для несжимаемых или почти несжимаемых материалов.

Представим дифференциальный оператор $1/E^*$ в виде суммы дробей

$$1/E^* = \frac{1}{A_1 + B_1 \frac{d}{dt}} + \frac{1}{A_2 + B_2 \frac{d}{dt}} + \dots + \frac{1}{A_n + B_n \frac{d}{dt}}, \quad (2)$$

и вектор деформации в виде набора

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_i = \frac{1}{A_i + B_i \frac{d}{dt}} D^{-1} \sigma.$$

Вектор узловых перемещений конечного элемента также представляется в виде суммы слагаемых:

$$\delta_3 = \delta_{31} + \delta_{32} + \dots + \delta_{3n}; \quad \delta_{3i} = B^{-1} \varepsilon_i, \quad (4)$$

где B - матрица деформации конечного элемента.

Уравнения, описывающие поведение вязкоупругого элемента, получаются путем минимизации функционала

$$\chi = \int_V \varepsilon^T \sigma dV + \int_V f^T \rho \frac{\partial^2 (f)}{\partial t^2} dV - \int_V f^T P dV, \quad (5)$$

где f - вектор перемещений элемента, ρ - плотность материала, P - вектор внешних сил.

Вектор перемещений связан с вектором узловых перемещений

$$f = N \delta_3, \quad (6)$$

где N - функция формы.

С учетом (3) и (6) функционал χ может быть записан в виде

$$\chi = \delta_3^T \left\{ \left(A_i + B_i \frac{d}{dt} \right) \int_V B^T D B dV \right\} \delta_{3i} + \delta_3^T \left\{ \int_V N^T \rho N dV \right\} \ddot{\delta}_3 - \delta_3^T \int_V N^T P dV.$$

Минимизируя функционал χ по параметрам δ_{3i} с учетом (4), получим системы связанных матричных уравнений, описывающих колебания вязкоупругого элемента:

$$\begin{aligned} m\ddot{\delta}_3 + B_1 k \dot{\delta}_{31} + A_1 k \delta_{31} &= R_3 \\ m\ddot{\delta}_3 + B_2 k \dot{\delta}_{32} + A_2 k \delta_{32} &= R_3 \\ \dots & \dots \\ m\ddot{\delta}_3 + B_n k \dot{\delta}_{3n} + A_n k \delta_{3n} &= R_3, \end{aligned} \quad (7)$$

где m - матрица масс элемента, k - матрица жесткости упругого элемента, вычисленная при единичном модуле упругости, R_3 - вектор узловых реакций и внешних сил.

В общем случае (7) переписывается в виде

$$m_S \ddot{\delta}_{3S} + c_S \dot{\delta}_{3S} + k_S \delta_{3S} = R_{3S},$$

где m_S , c_S , k_S - матрицы масс, вязкости и жесткости вязкоупругого элемента, содержащие в качестве подматриц упругие матрицы m и k ; δ_{3S} - вектор узловых перемещений вязкоупругого элемента; R_{3S} - вектор узловых реакций и внешних сил вязкоупругого элемента.

При решении задач динамики дифференциальный оператор E^* необходимо выбирать в таком виде, который позволил бы достаточно хорошо аппроксимировать в требуемом диапазоне частот экспериментально найденный комплексный модуль вязкоупругого материала. Если E^* представлять двумя слагаемыми суммы (I), то матрицы вязкоупругого элемента удобно формировать так, чтобы матрицы жесткости и масс определялись параметрами действительной части, а матрица вязкости - параметрами мнимой части комплексного модуля оператора E^* . Матрицы вязкоупругого элемента при этом имеют вид

$$m_S = \left[\begin{array}{c|c} m - \frac{B_2^2}{A_1 + A_2} k & \frac{B_2(B_1 + B_2)}{A_1 + A_2} k \\ \hline \frac{B_2(B_1 + B_2)}{A_1 + A_2} k & - \frac{(B_1 + B_2)^2}{A_1 + A_2} k \end{array} \right]$$

$$c_S = \left[\begin{array}{c|c} \frac{B_3 A_1}{A_3 + A_1} k & 0 \\ \hline \frac{B_3 A_1 - B_1 A_3}{A_3 + A_1} k & 0 \end{array} \right]$$

$$k_s = \left[\begin{array}{c|c} A_2 k_1 & A_2 k \\ \hline A_2 k & (A_1 + A_2) k \end{array} \right]$$

$$\delta_{\varepsilon s} = \begin{bmatrix} \delta_3 \\ \delta_{\varepsilon p} \end{bmatrix}, \quad \delta_{\varepsilon p} = \delta_{\varepsilon 2} - \delta_3, \quad R_{\varepsilon s} = \begin{bmatrix} R_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — коэффициенты дифференциального оператора, определяющие действительную часть его комплексного модуля; A_3, B_3 — коэффициенты дифференциального оператора, определяющие совместно с коэффициентами A_1, A_2, B_1, B_2 мнимую часть комплексного модуля.

Преимуществом такой формы представления является возможность варьировать шесть коэффициентами при аппроксимации вязкоупругих характеристик материала, а недостатком — несимметричность матрицы вязкости.

Таким образом, задача о колебаниях неоднородной вязкоупругой конструкции сводится к решению дифференциального матричного уравнения второго порядка

$$M\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + K\delta = F \quad (8)$$

путем увеличения числа степеней свободы вязкоупругих элементов. Здесь M, C, K — матрицы масс, вязкости и жесткости неоднородной вязкоупругой конструкции, δ — вектор узловых перемещений, F — вектор внешних сил.

Решение уравнения (8) ищется в виде линейной комбинации векторов, полученных в результате решения задачи свободных колебаний конструкций

$$(P^2 M + PC + K)\delta_0^* = 0. \quad (9)$$

Это задача действительных и комплексных собственных чисел и векторов. Так как матрица вязкости несимметрична, то необходимо вычислять левые и правые собственные вектора.

Первоначально решение уравнения (9) ищется без учета матрицы C , то есть решается уравнение

$$(K - \lambda M)X = 0. \quad (10)$$

Это задача действительных собственных чисел и векторов. Собственные векторы уравнения (9) ищутся в виде

$$\delta_{p_i} = \Delta z_{p_i}; \quad \delta_{e_i} = \Delta z_{e_i},$$

где Δ - матрица собственных векторов уравнения (10); z_{p_i}, z_{e_i} - собственные векторы левых и правых обобщенных координат.

Векторы z_p и z_e определяются уравнениями

$$(P^2 I + P \Delta^T C \Delta + \Omega) z_p = 0$$

$$(P^2 I + P \Delta^T C^T \Delta + \Omega) z_e = 0,$$

где I - единичная матрица, Ω - диагональная матрица квадратов собственных чисел уравнения (10).

Преимуществом такого подхода решения уравнения (9) является то, что задача комплексных собственных чисел решается для матричного уравнения невысокого порядка.

При найденных собственных числах и векторах уравнения (9) решение уравнения (8) определяется по формуле

$$\delta = \sum \delta_{p_i} q_i(t).$$

Здесь $q_i(t)$ - обобщенные координаты, определяемые из решения дифференциальных уравнений вида

$$\dot{q}_i - p_i q_i = \delta_{e_i}^T F.$$

Описанный метод демонстрируется на примере решения задачи вынужденных колебаний вязкоупругой цилиндрической оболочки, защемленной по краям, которая нагружается внутренним давлением $P = P_0 \sin \omega t$. Расчеты проведены при следующих значениях параметров: $P_0 = 1, h/R = 0,02, \rho = 1, E = 1, \nu = 0,3, L/R = 4$. Здесь R, L, h - радиус, длина и толщина оболочки; E, ρ, ν - модуль упругости, плотность, коэффициент Пуассона материала оболочки.

В работе /1/ исследована подобная оболочка. Вязкоупругие свойства оболочки описаны интегральным оператором вида

$$\tilde{E}(y) = E y(t) - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-s) y(s) ds,$$

где $\Gamma(t-s) = A e^{-\mu(t-s)} (t-s)^{\alpha-1}$, $y(t)$ - произвольная функция времени.

В работе /1/ рассмотрены две комбинации параметров: первая -

$A = 0,01, \mu = 0,05, \alpha = 0,1$; вторая - $A = 0,048, \mu = 0,05, \alpha = 0,1$. Первая комбинация параметров описывает маловязкий материал, вторая - вязкий. На рис.1 показаны действительные и мнимые части комплексных модулей, соответствующих интегральным операторам, описывающих маловязкий и вязкий материал. Здесь же приведена их аппроксимация дифференциальными операторами с шестью коэффициентами. На рис.2 представлены амплитудно-частотные характеристики

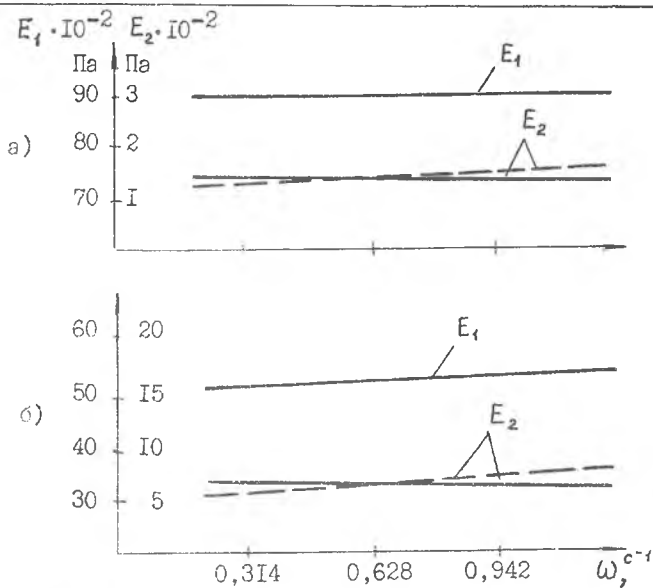


Рис. 1

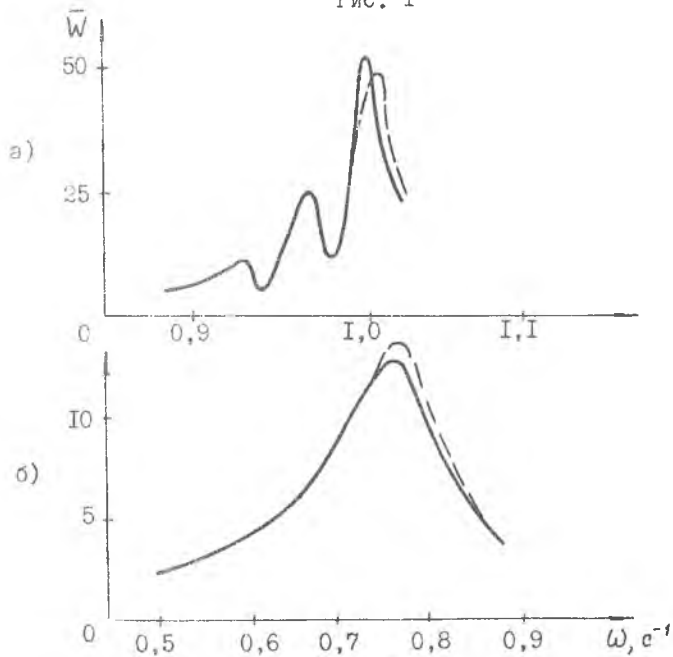


Рис. 2

перемещения точки $X = l/2$, отнесенной к статическому прогибу упругой оболочки. Результаты представлены для двух случаев вязкости. На этом же рисунке показаны амплитудно-частотные кривые, полученные в работе /1/. Сравнение результатов показывает хорошее совпадение.

Л и т е р а т у р а

1. Колтунов Н.А., Мирсаидов М., Трояновский И.Е. Установившиеся колебания осесимметричных вязкоупругих оболочек // Механика полимеров. - 1978. - № 2. - С. 290-295.

УДК 534.014.2

Ю.Н.Макаров, Р.В.Сидельников

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОЛЕТНЫХ ВИБРАЦИЙ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Полетные вибрации тонкостенных конструкций летательных аппаратов (ЛА) чаще всего вызываются нагрузками в виде случайных сил или полей пульсаций давления, спектральная плотность мощности которых охватывает весьма широкий диапазон частот. Уровень этих нагрузок все более возрастает в связи с увеличением мощности двигательных установок, ростом скоростей полета, близостью расположения полезной нагрузки к источникам акустического воздействия.

Как показывает практика /1/, повышенные уровни вибраций оказывают сильное влияние на надежность элементов бортового оборудования, на характеристики усталостной прочности элементов конструкции. В таких условиях прогнозирование уровня и спектрального состава полетных вибраций, особенно на ранних стадиях проектирования, становится актуальной задачей, решение которой требует развития расчетных методов.

В идеале метод должен быть достаточно простым, экономичным в употреблении и должен давать реалистические значения тех рассчитываемых характеристик, которые важны с точки зрения проектирования.

Опыт расчетов вибронегруженности конструкций ЛА в полете показывает, что к настоящему времени вследствие сложности рассчитываемых объектов и внешних нагрузок в практике проектно-конструкторских организаций, в основном, применяются эмпирические методы, основанные на пересчете данных, полученных при летных испытаниях. Эти методы дают большие погрешности при серьезных модификациях конст-