

УДК 624.074.4:539.1

И.В.Кабанов, Л.П.Железнов

АЛГОРИТМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ
НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ
КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Разработан алгоритм исследования нелинейного деформирования и устойчивости конструктивно-орто-тропных оболочек при произвольном неосесимметричном нагружении. Учитывается моментность и нелинейность исходного напряженно-деформированного состояния. Задача решается методом конечных элементов в перемещениях. В качестве конечного элемента выбран криволинейный прямоугольный элемент цилиндрической оболочки. Система нелинейных алгебраических уравнений равновесия решается методом Ньютона-Канторовича с использованием шагового метода по нагрузке. Критическая нагрузка находится с использованием энергетического критерия устойчивости. Исследована устойчивость ортотропной оболочки при неосесимметричном внешнем давлении.

I. Конечный элемент оболочки

Рассмотрим круглую цилиндрическую оболочку радиуса R , длины l , толщины h . Оболочка часто подкреплена продольным и поперечным набором прямоугольного поперечного сечения шириной δ и высотой a с шагом d . Оболочка нагружена произвольной системой поверхностных нагрузок $q_i(x, y)$, локальных сил P_{ei} и моментов M_{ei} , погонных контурных сил P_{ki} и моментов M_{ki} . Индекс $i = 1, 2, 3$ соответствует направлениям осей x, y, z соответственно. Оболочка по окружности разбивается на n , а по длине на m

вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Куйбышев. 1990

конечных элементов.

Используя решение /1/, запишем выражение для полных перемещений оболочки:

$$\begin{aligned}
 u &= \alpha_1 \xi \eta + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 - \alpha_5 s - \alpha_{20} c, \\
 v &= \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \xi c + \alpha_7 \eta + \alpha_8 - \alpha_{20} \xi s + \alpha_{23} c - \alpha_{24} s, \\
 w &= \alpha_9 \xi^3 \eta^3 + \alpha_{10} \xi^3 \eta^2 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi^3 + \alpha_{13} \xi^2 \eta^3 + \\
 &\quad + \alpha_{14} \xi^2 \eta^2 + \alpha_{15} \xi^2 \eta + \alpha_{16} \xi^2 + \alpha_{17} \xi \eta^3 + \alpha_{18} \xi \eta^2 + \\
 &\quad + \alpha_{19} \xi \eta + \alpha_{20} \xi c + \alpha_{21} \eta^3 + \alpha_{22} \eta^2 + \alpha_{23} s + \alpha_{24} c + \\
 &\quad + \alpha_6 \xi s, \quad c = \cos \varphi, \quad s = \sin \varphi, \quad K_2 = R^{-1}, \quad (I.1)
 \end{aligned}$$

где $\xi = K_2 x$, $\eta = \varphi$, $u = K_2 u'$, $v = K_2 v'$, $w = K_2 w'$.

В матричной форме (I.1) имеет вид

$$u = P \alpha, \quad (I.2)$$

где $u = \{u, v, w\}$ - вектор перемещений точек элемента, P - матрица связи порядка 3×24 , $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{24}\}$ - вектор неизвестных коэффициентов полиномов.

Используя решение /2/, запишем выражение для перемещений, деформаций и потенциальной энергии конечного элемента

$$\begin{aligned}
 u &= P_1 \bar{u}, \quad P_1 = P B^{-1}, \quad \varepsilon = A u, \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_n, \\
 \Pi &= W_1 + W_2 + W_3 - W_4 - A, \quad W_1 = \frac{1}{2} \iint_S T_e^T \varepsilon_e ds, \\
 W_2 &= \frac{1}{2} \iint_S T_e^T \varepsilon_n ds, \quad W_3 = \frac{1}{2} \iint_S T_n^T \varepsilon_e ds, \\
 W_4 &= \frac{1}{2} \iint_S T_n^T \varepsilon_n ds, \quad A = \iint_S q^T u ds + \int_l R_k^T u_k dl + R_e^T \bar{u}_e,
 \end{aligned} \quad (I.3)$$

где $\bar{u} = \{u_i, v_i, w_i, w_{\xi i}, v_i, w_{\xi \eta i}, u_j, \dots, u_k, \dots, u_n, \dots, w_{\xi \eta n}\}$ - вектор узловых перемещений конечного элемента, B - матрица порядка (24×24) , $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ - вектор деформа-

ций и кривизн конечного элемента, $Q_i = \{q_1, q_2, q_3\}$ - вектор внешней поверхностной нагрузки, $R_k = \{P_{k1}, P_{k2}, P_{k3}, M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}\}$, $R_e = \{P_{e1}, P_{e2}, P_{e3}, M_{e1}, M_{e2}, M_{e3}\}$ - векторы контурных и локальных сил и моментов, $U_k = \{u, v, w, w_{\xi}, w_{\eta}, w_{\xi\eta}\}$, $U_e = \{u_e, v_e, w_e, w_{\xi e}, v_e, w_{\xi\eta e}\}$, $v_i = -v_i + w_{\eta i}$.

$$A = A_e + A_n \quad (I.4)$$

$$A_e^T = \begin{bmatrix} ()_{\xi} & 0 & ()_{\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ()_{\eta} & ()_{\xi} & 0 & ()_{\eta} & 2()_{\xi} \\ 0 & 1 & 0 & -K_2()_{\xi\xi} & -K_2()_{\eta\eta} & -2K_2()_{\xi\eta} \end{bmatrix}$$

$$A_n^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}()_{\xi}^2 & \frac{1}{2}()_{\eta}^2 & ()_{\xi} ()_{\eta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I.5)$$

Запишем согласно /2,3/ статические соотношения для конструктивно-ортоотропной оболочки:

$$T = D \epsilon = T_e + T_n,$$

$$T_e = D \epsilon_e, \quad T_n = D \epsilon_n, \quad T = \{T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3\},$$

где

$$D = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & K_{11} & K_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & K_{33} \\ K_{11} & K_{21} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ K_{12} & K_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = K_1 + \frac{\alpha_q b_q}{d_q} E_q, \quad B_{22} = K_1 + \frac{\alpha_p b_p}{d_p} E_p,$$

$$B_{12} = B_{21} = K_2 + \nu \frac{b_p}{d_p} \frac{\alpha_q b_q}{d_q} E_q, \quad B_{33} = K_3 + \frac{1}{2} (1-\nu) K_{12} \alpha_q E_q,$$

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= D_1 + \frac{a_q b_q}{3d_q} \left(\frac{a_q^2}{4} + 3e_q^2 \right) E_q, & K_{12} &= \nu \frac{b_p}{d_p} \frac{a_q b_q e_q}{d_q} E_q, \\
 D_{22} &= D_1 + \frac{a_p b_p}{3d_p} \left(\frac{a_p^2}{4} + 3e_p^2 \right) E_p, \\
 D_{12} &= D_{21} = D_2 + \nu \frac{b_p}{d_p} \frac{a_q b_q}{3d_q} \left(\frac{a_q^2}{4} + 3e_q^2 \right) E_q, & K_{11} &= \frac{a_q b_q e_q}{d_q} E_q, \\
 D_{33} &= D_3 + \frac{1}{2} (1-\nu) K_{12} \frac{a_q}{3} \left(\frac{a_q^2}{4} + 3e_q^2 \right) E_q, & K_{22} &= \frac{a_p b_p e_p}{d_p} E_p, \\
 K_{33} &= \frac{1}{2} (1-\nu) K_{12} a_q e_q E_q, & K_1 &= Eh / (1-\nu^2), & K_2 &= \nu K_1, \\
 D_1 &= Eh^3 / 12 (1-\nu^2), & D_2 &= \nu D_1, & K_3 &= \frac{1}{2} (1-\nu) K_1, \\
 D_3 &= \frac{1}{2} (1-\nu) D_1, & K_{12} &= \frac{b_q}{2d_q} \frac{(1-\nu)}{(1-\nu \frac{b_q}{d_q})} \frac{I_{K1}}{I_1^*}, & I_K &= \frac{1}{2} (I_{Kq}^* + I_{Kp}^*), \\
 I_{K1}^* &= \frac{I_{K1} I_i}{I d_i E}, \quad i = q, p, & I_1^* &= \frac{E_q I_q}{d_q E I}, & I &= \frac{h^3}{12}, & I_q &= \frac{a_q^3 b_q}{12}, \\
 I_{K1} &= \frac{a_i^3 b_i}{3} \left(1 - 0,63 \frac{b_i}{d_i} + 0,052 \frac{b_i^5}{d_i^5} \right). & & & & & (1.6)
 \end{aligned}$$

В общем случае параметры a_i , b_i , d_i продольного и поперечного набора являются функциями продольной координаты x и поперечной координаты y .

Суммируя потенциальные энергии отдельных элементов, получаем полную потенциальную энергию оболочки.

2. Уравнения равновесия оболочки

Систему нелинейных алгебраических уравнений равновесия для оболочки получаем согласно принципу возможных перемещений

$$\delta \Pi = 0. \quad (2.1)$$

Используя решение /2/, получаем

$$\sum_{i=1}^{m \times n} [(K_{ii} + K_1 + 2K_1^T + K_2) \bar{u} - Q - Q_k - Q_e] = 0, \quad (2.2)$$

где

$$K_{ii} = (B^{-1}) \iint_S P^T A_e^T D A_e P ds B^{-1},$$

$$K_1 = \frac{1}{2} (B^{-1})^T \iint_S P^T A_e^T D^* \bar{B} P^* ds B^{-1},$$

$$K_2 = \frac{1}{2} (B^{-1})^T \iint_S (P^*)^T \bar{B}^T \bar{D} \bar{B} P^* ds B^{-1}, \quad Q = \iint_S q^T P ds B^{-1},$$

$$Q_k = \int_{\xi} R_k^T P_k ds B^{-1}, \quad Q_e = R_e,$$

$$(D^*)^T = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & K_{11} & K_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$(P_k)_{1j} = (P)_{1j}, \quad (P_k)_{2j} = (P)_{2j}, \quad (P_k)_{3j} = (P)_{3j},$$

$$(P_k)_{4j} = (P_{3j})_{\xi}, \quad (P_k)_{5j} = (P_{3j})_{\eta},$$

$$(P_k)_{6j} = (P_{3j})_{\xi\eta},$$

ξ, η в индексах означают дифференцирование.

Учитывая условие совместности перемещений согласно /2/ и граничные условия, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений равновесия оболочки

$$\bar{K} u' - \bar{Q} = 0, \quad (2.4)$$

где \bar{K} - матрица жесткости оболочки, ленточной структуры, получается суммированием элементов матрицы $K = K_{ii} + K_1 + 2K_1^T + K_2$ с использованием матрицы индексов, \bar{Q} - вектор обобщенных узловых сил оболочки - получается суммированием элементов вектора $Q = Q + Q_k + Q_e$ с использованием матрицы индексов, u' - вектор узловых перемещений оболочки.

3. Алгоритм решения уравнений равновесия

Для решения системы (2.4) воспользуемся методом Ньютона-Канторовича. Для этого представим, что для n -го приближения невязка уравнения (2.2)

$$\Psi(\bar{u}^n) = \sum_{i=1}^{m \times n} (K_u + K_1 + 2K_1^T + K_2) \bar{u} - Q - Q_K - Q_n \neq 0. \quad (3.1)$$

Угловым перемещениям \bar{u}^n дадим приращение $\bar{\Delta}$ и разложим $\Psi(\bar{u}^n + \bar{\Delta})$ в ряд Тейлора в окрестности \bar{u}^n , т.е.

$$\Psi(\bar{u}^n + \bar{\Delta}) = \Psi(\bar{u}^n) + \frac{\partial \Psi(\bar{u}^n)}{\partial \bar{u}^n} \bar{\Delta} + \dots \quad (3.2)$$

Сохраняя в (3.2) первые два члена и полагая, что выбранное приращение $\bar{\Delta}$ обращает невязку $\Psi(\bar{u}^n + \bar{\Delta})$ в ноль, получаем уравнение

$$\frac{\partial \Psi(\bar{u}^n)}{\partial \bar{u}^n} \bar{\Delta} = -\Psi(\bar{u}^n). \quad (3.3)$$

Производная $\frac{\partial \Psi(\bar{u}^n)}{\partial \bar{u}^n}$ является матрицей вторых производных потенциальной энергии оболочки и получается из второй вариации в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\bar{u}^n)}{\partial \bar{u}^n} &= \sum_{i=1}^{m \times n} \iint_S (\delta T_e^T \delta \varepsilon_e + \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{T}_{np} \delta \bar{\varepsilon} + \delta T_e^T \bar{B} \delta \bar{\varepsilon} + \\ &+ \delta \bar{\varepsilon}^T \bar{B}^T \delta T_e) ds = \sum_{i=1}^{m \times n} (K_u + K_1 + K_1^T + K_2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$K_u = (B^{-1})^T \iint_S P^T A_e^T DA_e P ds B^{-1}, \quad K_1 = (B^{-1})^T \iint_S P^T A_e^T D^* B P^* ds B^{-1},$$

$$K_2 = (B^{-1})^T \iint_S (P^*)^T \bar{T}_{np} P^* ds B^{-1}, \quad \bar{T}_{np} = \bar{T}_e + \bar{T}_n + \bar{T}_k,$$

$$\bar{T}_n = \begin{bmatrix} T_{1n} & T_{3n} \\ T_{5n} & T_{2n} \end{bmatrix}; \quad \bar{T}_k = \begin{bmatrix} T_{1k} & T_{3k} \\ T_{3k} & T_{2k} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

$$T_e = DA_e P B^{-1} \bar{u}, \quad \bar{T}_k = \bar{B}^T \bar{D} \bar{B}, \quad T_n = \frac{1}{2} \bar{D} \bar{B} \bar{\varepsilon}.$$

Учитывая условия совместности перемещений и граничные условия как в п.2, получаем

$$\frac{\partial \psi(\bar{u}^n)}{\partial \bar{u}^n} \bar{\Delta} - \bar{H} \Delta = Q - \bar{K}(\bar{u}')^n, \quad (3.6)$$

где \bar{H} - Гессиян системы, ленточной структуры, получается суммированием элементов матрицы $H = K_u + K_1 + K_1^T + K_2$ с использованием матрицы индексов.

Исполняя (3.6) уравнением

$$(\bar{u}')^{n+1} = (\bar{u}')^n + \Delta, \quad (3.7)$$

отыскиваем решение системы нелинейных алгебраических уравнений равновесия следующим способом. Задается небольшое значение параметра нагрузки. За нулевое приближение берется решение линейной задачи. Исполняется итерационный процесс по схеме (3.6)-(3.7), в котором матрица Гессе насчитывается один раз после первой итерации и не меняется на других итерациях. Далее нагрузка увеличивается. За нулевое приближение берется решение с предыдущего уровня нагрузки. Исполняется итерационный процесс. На каждой итерации система линейных алгебраических уравнений решается методом Крауда с использованием разложения $H = L^T D L / 4$. Решив систему (3.6), найдем все компоненты нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния.

4. Устойчивость оболочки

Для оценки устойчивости исходного состояния оболочки воспользуемся энергетическим критерием устойчивости, согласно которому равновесное состояние устойчиво, если $\delta^2 \Pi > 0$, и неустойчиво, если $\delta^2 \Pi < 0$. Отсюда следует, что для устойчивого равновесного состояния согласно критерию Сильвестера требуется положительная определенность матрицы Гессе \bar{H} , что в свою очередь требует положительности всех главных миноров матрицы \bar{H} . Если хотя бы один минор примет знак, то равновесное состояние становится неустойчивым. Изменение знака минора равносильно изменению знака элемента матрицы D в $L^T D L$ разложении \bar{H} , что легко контролируется в вычислительном алгоритме без дополнительных затрат машинного времени.

После того, как найдено значение параметра нагрузки, при котором равновесное состояние неустойчиво, отыскивается форма потери

устойчивости оболочки из решения системы

$$\bar{H} \delta = 0. \quad (4.1)$$

Для этого определяется одна из линейно зависимых строк матрицы \bar{H} , для которой минор становится отрицательным. Эта строка и соответствующий столбец матрицы \bar{H} зачищаются. На место диагонального элемента заносится единица, а в правую часть переносится столбец, умноженный на заданное перемещение.

5. Пример. В качестве примера и для проверки правильности алгоритма исследована устойчивость подкрепленной шпангоутами круговой цилиндрической оболочки при однородном и неоднородном внешнем давлении. Оболочка имела $L = L_1/R = 2$, $R/h = 100$, а подкрепления размеры: $\bar{a}_p = a_p/h = 8$, $\bar{b}_p = b_p/h = 2$, $\bar{d}_p = d_p/R = 0,165$.

Исследовалась устойчивость симметрично-подкрепленной оболочки, неоднородное внешнее давление изменялось по закону

$$q = q_0 (1 + \cos \varphi).$$

В случае однородного внешнего давления результаты исследований сравнивались с решением /3/. Отличие в решении не превышало 5%.

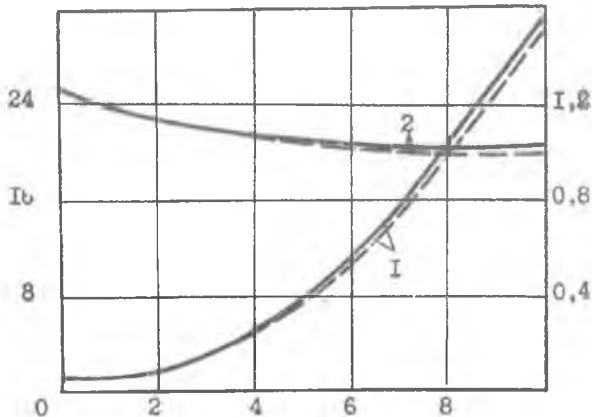


Рис. I

В силу плоскостной симметрии внешней нагрузки из оболочки вырезалась четвертая часть, которая в продольном и поперечном направлениях разбивалась на n криволинейных прямоугольных конечных элементов естественной кривизны.

На рис. I представлена зависимость безразмерных параметров

$K_p = q/q_{\ell}$ (кривые 1) и $K_p^* = q/q_{\ell}^*$ (кривые 2) в зависимости от параметра $\bar{\alpha}_p$, где q - критическая амплитуда неоднородного давления, q_{ℓ} и q_{ℓ}^* - верхние критические давления гладкой /5/ и подкрепленной /6/ оболочек. Сплошные кривые соответствуют решению при линейном исходном напряженно-деформированном состоянии, пунктирные - нелинейном состоянии. Видим слабое влияние нелинейности 3 + 5 %. С увеличением $\bar{\alpha}_p$, жесткости подкрепляющих шпангоутов, параметр K_p возрастает и тем значительнее, чем выше параметр $\bar{\alpha}_p$.

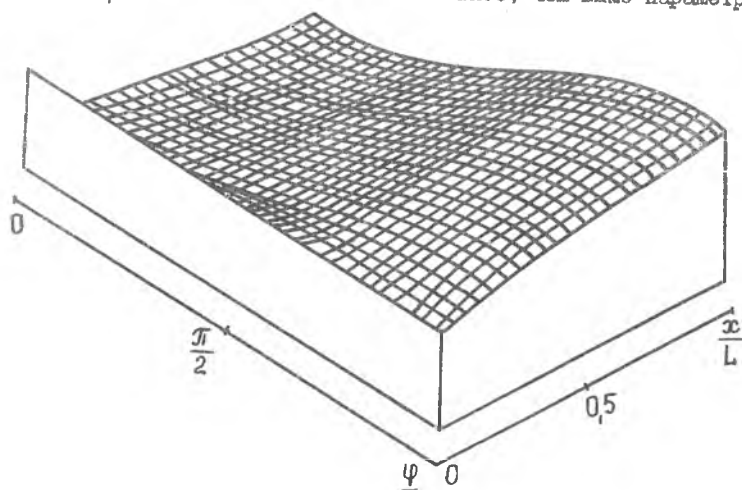


Рис. 2

В отличие от K_p параметр K_p^* с увеличением $\bar{\alpha}_p$ падает и для $\bar{\alpha}_p > 4$ практически не зависит от $\bar{\alpha}_p$ и равняется единице, т.е. в этом случае при расчете по q_{ℓ}^* /6/ неоднородное внешнее давление можно заменить амплитудным внешним давлением. Наибольшая погрешность при расчете по q_{ℓ}^* имеет место при малых значениях параметра $\bar{\alpha}_p < 4$ и равняется порядка 10 + 25 %. На рис. 2, 3 представлены формы деформированной поверхности оболочки в исходном докритическом состоянии и форма потери устойчивости оболочки. Оболочка в исходном состоянии деформируется по одной волне. Форма потери устойчивости носит общий характер с образованием 2-х продольных складок на боковой поверхности оболочки.

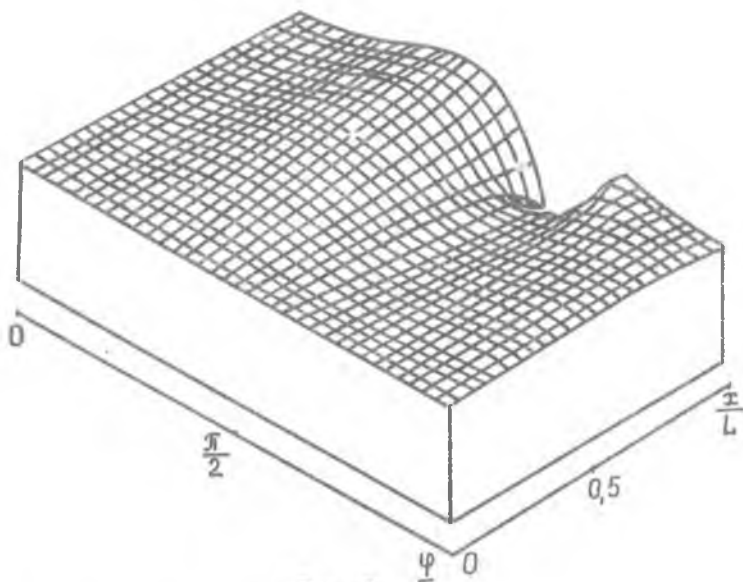


Рис. 3

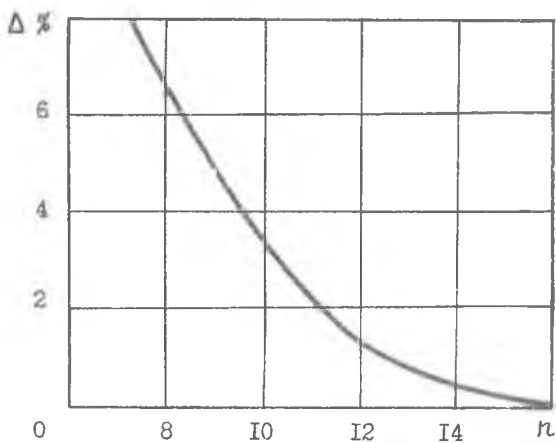


Рис. 4

На рис.4 представлен график сходимости решения по параметру n . Видим достаточно высокую скорость сходимости решения.

Библиографический список

1. Кабанов В.В., Железнов Л.П. К расчёту цилиндрической оболочки методом конечных элементов // Прикладная механика. 1985. 21. № 9, С. 35-40.
2. Кабанов В.В., Железнов Л.П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости цилиндрических оболочек при несосесимметричном внешнем давлении методом конечных элементов // Прикладная механика. 1981. 17. № 3. С. 71-76.
3. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1982. 253 с.
4. Уилкинсон Райнш. Справочник алгоритмов на языке Алгол. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1982. 230 с.
5. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. 360 с.
6. Муштари Х.М., Сви́рский И.В. Об устойчивости цилиндрической оболочки под действием равномерно распределенных осевого сжатия и внешнего нормального давления // Труды ФТИ Казанского фил. АН СССР, 1954, вып. I. С. 3-67.

УДК 629.7.02:539.4

И.Д.Левашов

СЛОВЫ СОЧЛЕНЕНИЯ ДЛЯ ПОДКОНСТРУКЦИЙ РАЗЛИЧНОЙ ИДЕАЛИЗАЦИЕЙ

На основе вариационного принципа Лагранжа при использовании усилий взаимодействия между смежными подконструкциями в качестве независимых переменных получены условия сочленения для частей конструкции, в которых используется различная идеализация. Показано, что для данных условий имеет место неоднозначность, а параметры,

ирсон прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Куйбышев, 1990