ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, 1980

УДК 624.074.4:539.384.4

В.В.Кабанов, Л.П.Железнов

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

Метод конечных элементов широко используется в задачах прочности оболочек. К задачам устойчивости оболочек метод начал активно применяться сравнительно недавно, хотя первые работы относятся к шестидесятым годам [I, 2]. В большинстве работ задачи решались в рамках классической схемы,т.е. при однородных исходных напряженных состояниях. В семидесятых годах появились работы [3,4], в которых учитывалась неоднородность напряженно-деформированного состояния оболочек, обусловленная влиянием граничных условий. В работах [5, 6] рассмотрен случай действия неоднородных осесимметричных нагрузок. Устойчивость подкрепленных оболочек при однородном осесимметричном нагружении с частичным учетом моментности исходного состояния (без учета искривления образующих) исследовалась в [7, 8]. В данной статье разработан машинный алгоритм исследования нелинейного деформирования и устойчивости подкрепленных стрингерами и шпангоутами цилиндрических оболочек переменной толщины при произвольном неосесимметричном нагружении.Учитывается нелинейность исходного напряженно-деформированного состояния, нерегулярность и дискретность подкреплений как по продольной, так и по окружной координатам. Система нелинейных алгебраических уравнений равновесия решается методом последовательных приближений в сочетании с шаговым методом по нагрузке. Задача устойчивости решается в рамках статического критерия устойчивости с учетом нелинейности исходного состояния оболочек.

I. Уравнение нелинейного исходного состояния. Рассматривается задача нелинейного деформирования и устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек типа отсеков фюзеляжа самолета, нагруженных системой поверхностных сил q'_1, q'_2, q'_3, локальных P'_{1k}, P'_{2k}, P'_{3k} и моментами M'_{1k}, M'_{2k}, M'_{3k}. Оболочка разбивается на η четырехугольных криволинейных конечных элементов, ℓ - прямолинейных и k криволинейных стержневых элементов (рис.I).

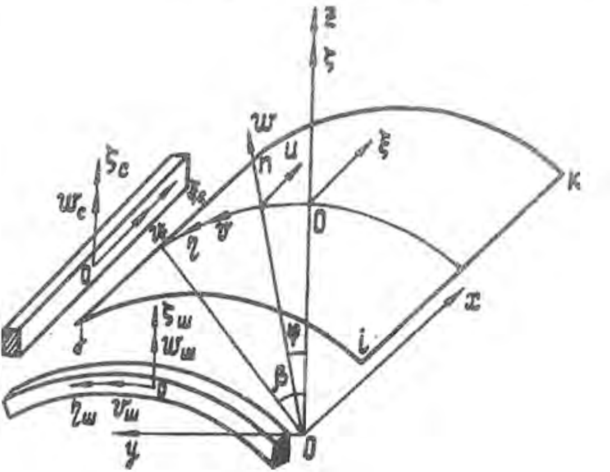

Рис. I

Согласно [I] зададим перемещения точек элемента полиномами, которые учитывают перемещения элемента как жесткого целого

$$u(\xi,\varphi)=\alpha_1\xi\varphi+\alpha_2\xi+\alpha_3\varphi+\alpha_4-\alpha_6 S-\alpha_{20}(C-\cos\beta)$$

$$v(\xi,\varphi)=\alpha_5\xi\varphi+\alpha_6\xi C+\alpha_7\varphi+\alpha_8(1-C\cdot\cos\beta)+\alpha_{20}\xi S$$

$$w(\xi,\varphi)=\alpha_9\xi^3\varphi^3+\alpha_{10}\xi^3\varphi^2+\alpha_{11}\xi^3\varphi+\alpha_{12}\xi^3+\alpha_{13}\varphi^3\xi^2+$$

$$+\alpha_{14}\xi^2\varphi^2+\alpha_{15}\xi^2\varphi+\alpha_{16}\xi^2+\alpha_{17}\xi\varphi^3+\alpha_{18}\xi\varphi^2+\alpha_{19}\xi\varphi+$$

$$+\alpha_{20}\xi C+\alpha_{21}\varphi^3+\alpha_{22}\varphi^2+\alpha_{23}S+\alpha_{24}C+\alpha_8 S\cdot\cos\beta+\alpha_6\xi S \qquad (I.I)$$

$$K_2=R^{-1},\quad \xi=K_2 x,\quad C=\cos\varphi,\quad S=\sin\varphi$$

$$u=K_2 u',\quad v=K_2 v',\quad w=K_2 w'.$$

В матричной форме (I.I) имеет вид

$$\tilde{U} = P\alpha, \tag{I.2}$$

где P - матрица связи, $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{24}]^T$ - вектор неизвестных коэффициентов полиномов, $\tilde{U} = [u, v, w]^T$ - вектор перемещений точек конечного элемента.

Используя решение работы [2], получаем с точностью до величин четвертого порядка малости выражение для перемещений и потенциальной энергии конечного элемента:

$$\tilde{U} = P_1 \bar{U}, \quad \Pi = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 - A$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\iint\limits_S T_e^T \mathcal{E}_e \, ds, \quad W_2 = \frac{1}{2}\iint\limits_S T_e^T \mathcal{E}_n \, ds \tag{I.3}$$

$$W_3 = \frac{1}{2}\iint\limits_S T_n^T \mathcal{E}_e \, ds, \quad W_4 = \frac{1}{2}\iint\limits_S T_n^T \mathcal{E}_n \, ds$$

$$A = \iint\limits_S q^T \tilde{U} \, ds + A_K + A_B,$$

где A_K - работа погонных контурных сил, A_B - работа сосредоточенных узловых сил, P_1 - матрица порядка (3х24). $\bar{U}^* = [u_i, v_i, w_i, w_{\xi i}, \vartheta_i, w_{\xi\varphi i}, u_j, v_j, w_j, w_{\xi j}, \vartheta_j, w_{\xi\varphi j}, u_K, v_K, w_K, w_{\xi K}, \vartheta_K, w_{\xi\varphi K}, u_n, v_n, w_n, ..., w_{\xi\varphi n}]^T$ - вектор узловых перемещений конечного элемента, $\vartheta_K = w_{\varphi K} - v_K$, координаты в индексах означают дифференцирование. Запишем выражение энергии деформации и работы внешних сил для элемента шпангоута ($p = ш$) и стрингера ($p = c$)

$$W_p = \frac{1}{2}\int\limits_\ell \tilde{\tilde{T}}_p^T \tilde{\mathcal{E}}_p \, d\ell, \quad A_p = \int\limits_\ell q_p \tilde{U}_p \, d\ell + A_{pB}, \tag{I.4}$$

где $\tilde{T}_p = [T_p, M_{p1}, M_{p2}, M_{p3}]^T$ - вектор внутренних усилий элемента подкреплений, $\tilde{\mathcal{E}}_p = [\mathcal{E}_p, \varkappa_{p1}, \varkappa_{p2}, \varkappa_{p3}]^T$ - вектор деформаций элемента подкреплений, $q_p = [q_{p1}, q_{p2}, q_{p3}]^T$ - вектор погонных контурных сил, приложенных к элементу подкрепления, $\tilde{U}_p = [u_p, v_p, w_p]^T$ - вектор перемещений точек центров тяжести сечений элемента подкрепления, A_{pB} - работа локальных сил, приложенных к элементу подкрепления.

Кинематические и статические соотношения для элемента подкреплений имеют вид

$$\tilde{\mathcal{E}}_p = \tilde{A}_p \tilde{U}_p = (A_{p\ell} + A_{pn})\tilde{U}_p = \tilde{\mathcal{E}}_{p\ell} + \tilde{\mathcal{E}}_{pn}$$

$$\tilde{T}_p = \tilde{D}_p \tilde{\mathcal{E}}_p = \tilde{T}_{p\ell} + \tilde{T}_{pn}, \tag{I.5}$$

$$\tilde{A}_{ш\ell} = \begin{bmatrix} -\ell_1(\,) & \psi(\,)_\varphi \;\; \ell(\,) \\ k_2 \ell \ell_1(\,) & 0 - \psi^2 k_2(\,)_{\varphi\varphi} - k_2 \ell^2(\,) - k_2 \ell_1 \beta \\ k_2 \psi \ell\,(\,)_\varphi & 0 \;\; \psi k_2 \ell_1(\,)_\varphi - \psi k_2 \beta_\varphi \\ -k_2 \psi^2(\,)_{\varphi\varphi} - k_2 \ell_1^2(\,) & 0 \;\; k_2 \ell \ell_1(\,) - k_2 \ell \beta \end{bmatrix}$$

$$A_{c\ell} = \begin{bmatrix} 0 & (\,)_\xi & 0 \\ 0 & 0 & -k_2(\,)_{\xi\xi} \\ 0 & 0 & -\psi k_2(\,)_{\xi\varphi} \\ -k_2(\,)_{\xi\xi} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_p = \begin{bmatrix} EF_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{pp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EJ_{p2} \end{bmatrix} \tag{I.6}$$

$$u_p = k_2 u_p', \quad v_p = k_2 v_p', \quad w_p = k_2 w_p.$$

Здесь:

$$\beta = w_\xi, \quad \ell = \cos\alpha, \quad \ell_1 = \sin\alpha, \quad \psi = \frac{1}{(1-\bar{e})}, \quad \bar{e} = k_2 e,$$

e – эксцентриситет подкрепления; α – угол между главными осями инерции поперечного сечения подкрепления и локальными координатами оболочки (фиг. 2); F_p , J_{pp} , J_{p1} , J_{p2} – площадь сечения, полярный момент инерции, максимальный и минимальный моменты инерции сечения элемента подкрепления; E_p , G_p – модули упругости и модули сдвига элемента подкрепления.

Представим $\tilde{\mathcal{E}}_{pn}$ в виде

$$\tilde{\mathcal{E}}_{pn} = [\mathcal{E}_{pn}, 0, 0, 0]^T, \qquad \mathcal{E}_{pn} = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_{p\ell}^2 + \omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2) \tag{I.7}$$

$$\omega_{ш1} = \ell v_ш - \psi(w_ш)_\varphi, \quad \omega_{ш2} = \ell_1 v_ш - \psi(u_ш)_\varphi$$

$$\omega_{c1} = \ell v_c - (w_c)_\xi, \qquad \omega_{c2} = \ell_1 v_c - (u_c)_\xi. \tag{I.8}$$

Проделывая несложные преобразования в (I.7), подставляя (I.8) в (I.7), находим

$$\mathcal{E}_{шn} = \frac{\psi^2}{2}((w_ш)_\varphi^2 + (u_ш)_\varphi^2 + (v_ш)_\varphi^2) + \frac{1}{2}\{\ell_1^2(u_ш)^2 + \ell^2 w_ш^2 - 2\ell_1\psi u_ш (v_ш)_\varphi +$$
$$+ 2\ell\ell_1 u_ш w_ш + 2\ell\psi(v_ш)_\varphi w_ш + v_ш^2 - 2\ell v_ш \psi(w_ш)_\varphi - 2\ell_1\psi v_ш (u_ш)_\varphi\},$$

$$\mathcal{E}_{cn} = \frac{1}{2}((u_c)_\xi^2 + (w_c)_\xi^2 + (v_c)_\xi^2) + \frac{1}{2}\{v_c^2 - 2\ell v_c (w_c)_\xi - 2\ell_1 v_c (u_c)_\xi\}. \tag{I.9}$$

Оставляя в выражениях для $\mathcal{E}_{шn}$, $\mathcal{E}_{cn}$ главные слагаемые, содержащие квадраты углов поворота u_ξ, u_φ, w_ξ, w_φ, v_ξ, v_φ, получаем

$$\mathcal{E}_{шn} = \frac{1}{2}\psi^2\left((u_ш)_\varphi^2 + (w_ш)_\varphi^2 + (v_ш)_\varphi^2\right)$$
$$\mathcal{E}_{cn} = \frac{1}{2}\left((u_c)_\xi^2 + (v_c)_\xi^2 + (w_c)_\xi^2\right). \tag{I.10}$$

Следовательно:

$$A_{шn} = \begin{bmatrix} \frac{\psi^2}{2}(\ )_\varphi^2 & \frac{\psi^2}{2}(\ )_\varphi^2 & \frac{\psi^2}{2}(\ )_\varphi^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{cn} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\ )_\xi^2 & \frac{1}{2}(\ )_\xi^2 & \frac{1}{2}(\ )_\xi^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{I.11}$$

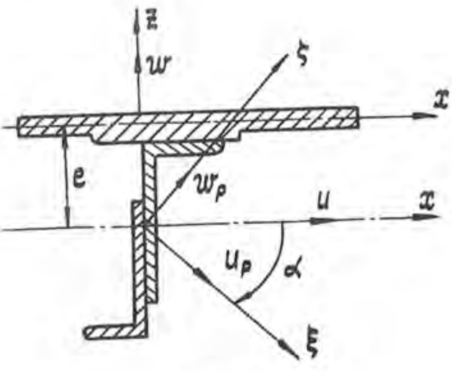

Рис. 2

Согласно рис. 2 находим

$$u_ш = \ell u - \ell_1 w + \bar{e}\,\ell\, w_\xi, \qquad u_c = \ell v - \ell_1 w + \bar{e}\,\ell\cdot w_\varphi$$
$$v_ш = v(1-\bar{e}) + \bar{e}\, w_\varphi, \qquad v_c = u + \bar{e}\, w_\xi$$
$$w_ш = \ell w + \ell_1 u + \bar{e}\,\ell_1 w_\xi, \quad w_c = \ell w + \ell_1 v + e\,\ell_1 w_\varphi. \tag{I.12}$$

Тогда

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}\bar{B}\bar{\mathcal{E}}, \quad \bar{\mathcal{E}}^T = \{w_\xi, w_\varphi\}, \quad \bar{\mathcal{E}} = \bar{P}^*\bar{u}, \quad \bar{P}^* = P^*B^{-1}$$

$$\bar{B}^T = \begin{bmatrix} w_\xi & 0 & w_\varphi \\ 0 & w_\varphi & w_\xi \end{bmatrix}, \qquad (I.$$

$$\mathcal{E}_{шn} = \frac{\psi^2}{2} w_\varphi^2 + \left\{\frac{\psi^2}{2}(u_\varphi^2 + \frac{v_\varphi^2}{\psi^2} + 2\bar{e}\, u_\varphi w_{\xi\varphi} + 2\bar{e}\cdot v_\varphi w_{\varphi\varphi} + \bar{e}^2 w_{\xi\varphi}^2 + \bar{e}^2 w\right.$$

$$\mathcal{E}_{cn} = \frac{1}{2} w_\xi^2 + \frac{1}{2}\left\{u_\xi^2 + v_\xi^2 + 2\bar{e}\, v_\xi w_{\xi\varphi} + 2\bar{e}\, u_\xi w_{\xi\xi} + \bar{e}^2\cdot w_{\xi\varphi}^2 + \bar{e}^2 w_{\xi}^2\right.$$

Пренебрегая величинами в фигурных скобках как малыми по[...] нению с w_ξ^2 , w_φ^2 , получаем

$$\mathcal{E}_{шn} = \frac{\psi^2}{2} w_\varphi^2, \quad \mathcal{E}_{cn} = \frac{1}{2} w_\xi^2, \quad w_\xi = \bar{P}_1^*\bar{u}, \quad w_\varphi = \bar{P}_2^*\bar{u}$$

$$\bar{P}_1^* = P_1^* B^{-1}, \quad \bar{P}_2^* = P_2^* B^{-1}, \qquad (I.$$

где P_1^* , P_2^* – матрицы порядка (Ix24), P^* – матрица п[...] ка (2x24):

$$\delta\mathcal{E}_n = B\delta\bar{\mathcal{E}}, \quad \delta\mathcal{E}_{шn} = \psi^2 w_\varphi \delta w_\varphi, \quad \delta\mathcal{E}_{cn} = w_\xi \delta w_\xi. \qquad (I.$$

В матричной форме

$$\tilde{u}_ш = \tilde{B}_ш \tilde{u}, \quad \tilde{u}_c = \tilde{B}_c \tilde{u} \qquad (I.$$

$$\tilde{B}_ш = \begin{bmatrix} \ell & 0 & -\ell_1 + e\ell(\ )_\xi \\ 0 & \frac{1}{\psi} & \bar{e}(\ )_\varphi \\ \ell_1 & 0 & \ell + \bar{e}\ell_1(\ )_\xi \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & \ell & -\ell_1 + \bar{e}(\ )_\varphi \\ 1 & 0 & \bar{e}(\ )_\xi \\ 0 & \ell_1 & \ell + \bar{e}\ell_1(\ )_\varphi \end{bmatrix}.$$

Подставляя (I.16) в (I.5), находим

$$\tilde{\mathcal{E}}_p = \tilde{A}_p'\tilde{u} = (\tilde{A}_{p\ell}' + \tilde{A}_{pn}')\tilde{u}, \quad \tilde{T}_p = \tilde{D}_p(\tilde{A}_{p\ell}' + \tilde{A}_{pn}')\tilde{u} \qquad (I.$$

$$\tilde{A}_{p\ell}' = \tilde{A}_{p\ell}\tilde{B}_p, \quad \tilde{A}_{pn}' = \tilde{A}_{pn}\tilde{B}_p.$$

Полученные выражения используются для записи уравнения п[...] циальной энергии элемента подкреплений, которое представим в

$$\Pi_p = W_{p1} + W_{p2} + W_{p3} + W_{p4} - A_p$$

$$W_{p1} = \frac{1}{2}\int_\ell \tilde{T}^T_{p\ell}\,\tilde{\varepsilon}_{p\ell}\, d\ell, \quad W_{p2} = \frac{1}{2}\int_\ell \tilde{T}^T_{p\ell}\,\tilde{\varepsilon}_{pn}\, d\ell \tag{I.18}$$

$$W_{p3} = \frac{1}{2}\int_\ell \tilde{T}^T_{pn}\,\tilde{\varepsilon}_{p\ell}\, d\ell, \quad W_{p4} = \frac{1}{2}\int_\ell \tilde{T}^T_{pn}\,\tilde{\varepsilon}_{pn}\, d\ell$$

$$A_p = \int_\ell q_p \tilde{u}_p\, d\ell + A_{p\theta}.$$

Суммируя потенциальные энергии отдельных элементов, получим ...ную потенциальную эрергию оболочки

$$... = \sum_{i=1}^{r} (W_1 + W_2 + W_3 + W_4 - A) + \sum_{i=1}^{K} (W_{p1} + W_{p2} + W_{p3} + W_{p4} - A_p). \tag{I.19}$$

Выполняя варьирование в (I.I9), согласно принципу возможных ...ремещений ($\delta U = 0$), с учетом (I.I3), (I.I4) получаем следую... систему нелинейных уравнений равновесия для оболочки:

$$U = \Big\{\sum_{i=1}^{r}\big[(K_u + K_1 + 2K_1^T + K_2)\bar{u} - Q\big] + \sum_{i=1}^{\ell+K}\big[(K_p + K_{p1} + 2K_{p1}^T +$$

$$K_{p2})\bar{u} - Q_p\big]\Big\} = 0, \quad K_u = D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \iint_S P^T A_\ell^T \bar{D} A_\ell P\, ds\, B^{-1} \tag{I.20}$$

$$K_1 = \frac{1}{2} D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \iint_S P^T \tilde{A}_\ell^T \bar{D}^* \bar{B} P^*\, ds\, B^{-1}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \iint_S (P^*)^T \bar{B}^T \bar{D}^* \bar{B} P^*\, ds\, B^{-1}$$

$$Q = D_1 k_2^2 \iint_S q^T P\, ds\, B^{-1} + Q_K + Q_\theta$$

$$K_ш = D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \int_\ell P^T (\tilde{A}'_{ш\ell})^T \bar{D}_ш \tilde{A}'_{ш\ell} P\, d\varphi\, B^{-1}\Big|_{\xi = \pm a}$$

$$K_{ш1} = \frac{1}{2} D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \int_\ell \psi P^T (\tilde{A}^*_{ш\ell})^T D^*_ш w_\varphi P_2^*\, d\varphi\, B^{-1}\Big|_{\xi = \pm a}$$

$$K_{ш2} = \frac{1}{2} D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \int_\ell \psi^3 (P_2^*)^T w_\varphi D^*_ш w_\varphi P_2^*\, d\varphi\, B^{-1}\Big|_{\xi = \pm a}$$

$$Q_ш = D_1 k_2^2 \int_\ell \frac{1}{\psi} q_ш^T \tilde{B}_ш P\, d\varphi\, B^{-1} + Q_{ш\theta}\Big|_{\xi = \pm a} \tag{I.21}$$

$$K_c = D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \int_\ell P^T (\tilde{A}'_{c\ell})^T \bar{D}_c \tilde{A}'_{c\ell} P \, d\xi \, B \Big|_{\varphi=\pm b}$$

$$K_{c1} = \frac{1}{2} D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \int_\ell P^T (\tilde{A}^*_{c\ell})^T D^*_c \, w_\xi P^*_1 \, d\xi \, B^{-1} \Big|_{\varphi=\pm b}$$

$$K_{c2} = \frac{1}{2} D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \int_\ell (P^*_1)^T w_\xi D^*_c \, w_\xi P^*_1 \, d\xi \, B^{-1} \Big|_{\varphi=\pm b}$$

$$Q_c = D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \int_\ell q_c^T \tilde{B}_c P \, d\xi \, B^{-1} + Q_{cb} \Big|_{\varphi=\pm b}$$

$$D = D_1 \bar{D}, \quad \tilde{D}_ш = D_1 \varphi \bar{D}_ш, \quad \tilde{D}_c = D_1 \bar{D}_c, \quad \tilde{A}_\ell[i,j] = A_\ell[i,j], \quad i=j=1,2,$$

$$\tilde{A}^*_{ш\ell} = \tilde{A}'_{ш\ell}[1,i], \quad \tilde{A}^*_{c\ell} = \tilde{A}'_{c\ell}[1,i], \quad i = 1,2,3$$

$$D^*_ш = \frac{E_ш F_ш}{D_1 k_2}, \quad D^*_c = \frac{E_c F_c}{D_1 k_2}, \quad a = \frac{L}{2R_m}, \quad b = \frac{\pi}{2n}.$$

Q , $Q_к$ – векторы поверхностных и контурных сил, приведенн узлам; Q_b – вектор локальных сил.

Условия совместности перемещений в узлах конечных элемен имеют вид

$$\bar{u}_i^{\,i} = \bar{u}_j^{\,i-1} = \bar{u}_к^{\,i-n} = \bar{u}_n^{\,i-n-1}, \quad \bar{u}_j^{\,i} = \bar{u}_i^{\,i-1} = \bar{u}_n^{\,i-n} = \bar{u}_к^{\,i-n+1}$$
$$\bar{u}_к^{\,i} = \bar{u}_n^{\,i-1} = \bar{u}_i^{\,i+n} = \bar{u}_j^{\,i+n-1}, \quad \bar{u}_n^{\,i} = \bar{u}_к^{\,i+1} = \bar{u}_j^{\,i+n} = \bar{u}_i^{\,i+n+1}, \qquad \text{(I.2}$$

где ($\bar{u}_к^{\,i-1}$) $= [u_к, v_к, w_к, w_{\xi к}, \vartheta_к, w_{\xi\varphi к}]^T$ – вектор узловых ремещений $к$ -го узла $i-1$ -го конечного элемента, n вве означает число конечных элементов по окружности. Учитывая (I.2 и граничные условия согласно [2], преобразуем систему (I.20) виду

$$(\bar{K} + \bar{K}_1 + 2\bar{K}_1^T + \bar{K}_2 + \bar{K}_p + \bar{K}_{p1} + 2K_{p1}^T + K_{p2}) u' = \bar{Q} + \bar{Q}_p. \qquad \text{(I.2}$$

Здесь $\bar{K}$, $\bar{K}_p$ – матрицы упругой жесткости оболочк подкреплений, $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$, $\bar{K}_{p1}$, $\bar{K}_{p2}$ – матрицы геометричес жесткости оболочки, $\bar{Q}$, $\bar{Q}_p$ – векторы обобщенных узловых оболочки.

Матрицы $\bar{K}$, $\bar{K}_p$, $\bar{K}_1$, $\bar{K}_{p1}$, $\bar{K}_2$, $\bar{K}_{p2}$ имеют трехленточ блочно-диагональное строение, размерность блоков которых ра $6 \times (n + I)$.

Решение системы (I.23) строим методом последовательных приближений в сочетании с шаговым методом по нагрузке. Задается небольшое значение параметра нагрузки. За нулевое приближение берется решение линейной задачи. Выполняется итерационный процесс, в котором нелинейные слагаемые берутся из предыдущей итерации.

Система (I.23) в методе последовательных приближений имеет вид

$$\bar{K}'u' = \bar{Q}', \quad \bar{K}' = \bar{K} + \bar{K}_p$$
$$\bar{Q}_1 = \bar{Q} + \bar{Q}_p - (\bar{K}_1 + 2\bar{K}_1^T + \bar{K}_2 + \bar{K}_{p1} + \bar{K}_{p2} + 2K_{p1}^T)u'_{z-1}. \tag{I.24}$$

На каждой итерации система линейных алгебраических уравнений решается методом квадратного корня по схеме Холецкого [3]. Решив систему (I.25), найдем все компоненты нелинейного напряженно-деформированного состояния оболочки.

2. Устойчивость оболочек. Используя энергетический критерий устойчивости

$$\delta(\delta^2 U) = 0, \tag{2.I}$$

получаем

$$\delta(\delta^2 U) = \delta\Big\{\sum_{i=1}^{z}(\delta^2 W_1 + \delta_2^2 W_2 + \delta^2 W_3 + \delta^2 W_4) + \sum_{i=1}^{K}(\delta^2 W_{p1} + \delta^2 W_{p2} +$$
$$+ \delta^2 W_{p3} + \delta^2 W_{p4})\Big\}\delta u' = 0. \tag{2.2}$$

Выполняя варьирование в (2.2), с учетом (I.20), (I.2I), (I.22) и равенств

$$\delta^2 \varepsilon_n = \delta\bar{B}\,\delta\bar{\varepsilon}, \quad \delta^2 \varepsilon_{шn} = \psi^2 \delta w_\varphi \delta w_\varphi, \quad \delta^2 \varepsilon_{cn} = \delta w_\xi \delta w_\xi, \tag{2.3}$$

находим

$$\Big\{\sum_{i=1}^{z}(K_u + K_1^o + (K_1^o)^T + K_2^o)\delta\bar{u} + \sum_{i=1}^{K}(K_p + K_{p1}^o + (K_{p1}^o)^T + K_{p2}^o)\delta\bar{u}\Big\} = 0 \tag{2.4}$$

$$K_2^o = D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \iint_S (P^*)^T T_{np}^o P^* ds\, B^{-1}$$

$$K_1^o = D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \iint_S P^T \tilde{A}_\ell^T \bar{D}^* \bar{B}^o P^* ds\, B^{-1}$$

$$K^0_{ш1} = D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \psi \int_\ell P^T (\tilde{A}^*_{ш\ell})^T D^*_ш w^0_\varphi P^*_2 \, d\varphi \, B^{-1} \Big|_{\xi=\pm a}$$

$$K^0_{c1} = D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \int_\ell P^T (\tilde{A}^*_{c\ell})^T D^*_c w^0_\xi P^*_1 \, d\xi \, B^{-1} \Big|_{\varphi=\pm b}$$

$$K^0_{ш2} = D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \psi \int_\ell (P^*_2)^T T^0_ш P^*_2 \, d\varphi \, B^{-1} \Big|_{\xi=\pm a} \qquad (2$$

$$K^0_{c2} = D_1 k_2^2 (B^{-1})^T \int_\ell (P^*_1)^T T^0_c P^*_1 \, d\xi \, B^{-1} \Big|_{\varphi=\pm b}$$

$$T^0_{пр} = \begin{bmatrix} T^0_{1пр} & T^0_{3пр} \\ T^0_{3пр} & T^0_{2пр} \end{bmatrix}, \qquad (\bar{B}^0)^T = \begin{bmatrix} w^0_\xi & 0 & w^0_\varphi \\ 0 & w^0_\varphi & w^0_\xi \end{bmatrix}$$

$$T^0_{1пр} = T^0_{1\ell} + \frac{3}{2}\tilde{K}_1 (w^0_\xi)^2 + (\tilde{K}_3 + \frac{1}{2}\tilde{K}_2)(w^0_\varphi)^2$$

$$T^0_{2пр} = T^0_{2\ell} + \frac{3}{2}\tilde{K}_1 (w^0_\varphi)^2 + (\tilde{K}_3 + \frac{1}{2}\tilde{K}_2)(w^0_\xi)^2$$

$$T^0_{3пр} = T^0_{3\ell} + (2\tilde{K}_3 + \tilde{K}_2) w^0_\xi w^0_\varphi$$

$$T^0_ш = T_{ш\ell} + \frac{1}{2} D^*_ш (w^0_\varphi)^2, \qquad T^0_c = T^0_{c\ell} + \frac{1}{2} D^*_c (w^0_\xi)^2$$

$$\tilde{K}_1 = \frac{12}{t^2}, \quad t = \frac{h}{R}, \quad \tilde{K}_2 = \nu \tilde{K}_1$$

$$\tilde{K}_3 = \frac{1}{2}(1-\nu)\tilde{K}_1 .$$

Индекс " 0 " означает исходное состояние. Матрицы $K_ш$, K_c имеют вид (I.2I).

Уравнение (2.4) преобразуем с учетом условий совместно перемещений (I.22) к виду

$$\tilde{K}^0 \delta u' = 0$$

$$\tilde{K}^0 = \bar{K} + \bar{K}^0_1 + (\bar{K}^0_1)^T + \bar{K}^0_2 + \bar{K}_p + \bar{K}^0_{p1} + (\bar{K}^0_{p1})^T + \bar{K}^0_{p2} .$$

Матрицы $\bar{K}^0_1$, $\bar{K}^0_2$, $\bar{K}_p$, $\bar{K}^0_{p1}$, $\bar{K}^0_{p2}$ имеют такую же структу как и матрица $\bar{K}$ в пункте I.

Нетривиальное решение системы (2.6) соответствует равенству нулю ее определителя

$$|\tilde{K}^{\circ}| = 0. \tag{2.7}$$

Критическая нагрузка находится как наименьший корень уравнения (2.7). Это удобно делать графически, насчитывая определитель для ряда значений параметра нагрузки. При этом определитель (2.7) представляется произведением

$$|\tilde{K}^{\circ}| = \prod_{i=1}^{6\times(m+1)(n+1)} M_i$$

$$M_1 = k_{11}, \quad M_i = k_{ii} - \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{a_{i\ell}\, a_{i\ell}}{a_{\ell\ell}}, \quad a_{ij} = k_{ij} - \sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{a_{i\ell}\, a_{j\ell}}{a_{\ell\ell}} \tag{2.8}$$

и легко вычисляется при любом числе конечных элементов. Полученный алгоритм реализован программой для машины БЭСМ-6 и позволяет исследовать нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленной дискретно стрингерами и шпангоутами переменной жесткости цилиндрической оболочки при произвольном нагружении и при любых граничных условиях.

3. Пример. В примере была рассмотрена шарнирно-оперта я цилиндрическая оболочка с $L/R=1$, R/h = 100, симметрично подкрепленная по середине шпангоутом постоянной жесткости и нагруженная неосесимметричным давлением, изменяющимся по закону

$$q_3 = q_3^{\circ}(1+\cos\varphi). \tag{3.1}$$

На рис. 3 приведен график зависимости безразмерных параметров $K_g = q/q_B$, $K_g^* = q/\bar{q}_B$, $\bar{K}_g = q_p/q_B$, $K_g^* = q_p/\bar{q}_B$ (q - критическая амплитуда неоднородного давления, q_p - предельная амплитуда неоднородного давления, которая соответствует интенсивному возрастанию прогибов и углов поворота, q_B - верхнее критическое однородное давление для гладкой оболочки по формуле Саутуэлла-Папковича, $\bar{q}_B$ - верхнее критическое однородное давление для конструктивно-ортотропной оболочки [4] при допущении безмоментности исходного состояния) в зависимости от параметра $\bar{F}=(E_ш F_ш)/(D_1 K_2)$. При этом параметр $\bar{J}=(E_ш J_ш)/(D_1 R)$ менялся пропорционально параметру $\bar{F}$, т.е. $\bar{J}=10^{-2}\bar{F}$. Изгибом шпангоута из своей плоскости и кручением его пренебрегаем. С увеличением параметра $\bar{F}$ величина K_g растет, а величина K_g^* сначала растет, потом падает. Анализ этих кривых показывает, что расчет по q_B и $\bar{q}_B$ может привести к существенной до 100% для $q_в$ и 40% для $\bar{q}_в$ погрешности. Из рисун... видно, что критические значения параметров $\bar{K}_g$ и $\bar{K}_g^*$ лежат вы... критических значений параметров K_g и K_g^*, т.е. оболочка раньш... теряет устойчивость, чем достигает предельного состояния.

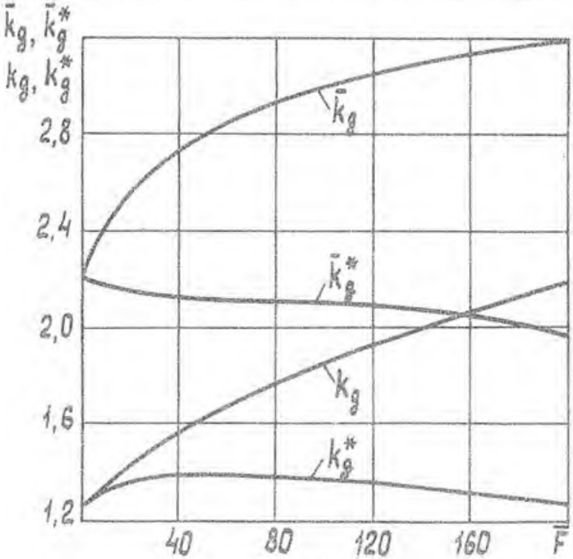

Рис. 3

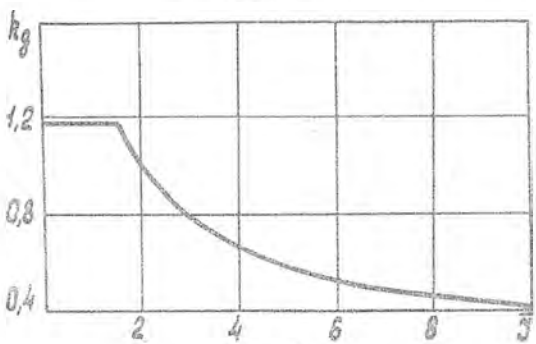

Рис. 4

На рис. 4 показан график зависимости параметра $K_g = q/\bar{q}_в$ от параметра $\bar{J}$ для оболочки, нагруженной однородным давление... ($\bar{F}$ = 1000). Видно, что с увеличением параметра $\bar{J}$ величина K_g^* сначала не зависит от $\bar{J}$ и при $J > 1.52$ падает. Это объясняется тем, что при $\bar{J}$ < I.52 форма потери устойчивости носит общий характер и формулы по ортотропной схеме хорошо согласуются с результатами расчета. При этом погрешность порядка I8% связана с влиянием моментности исходного состояния. При $\bar{J}$ > I.52 форма потери устойчивости оболочки носит местный характер, т.е. оболочка теряет устойчивость между шпангоутами. Формулы ортотропной схемы дают существенную погрешность, которая увеличивается с увеличением параметра $\bar{J}$.

Все результаты получены при числе конечных элементов, равном I4 x I0 x L/R . При этом обеспечивается погрешность решения, не превышающая 5%.

Литература

I. Gallagher R.H. and Padlog J. Discrete element approah to structural instability analysis. - AIAAJ, 1963, N1, p. 1437-1439.

2. Backus W.E., Mello R.M. Some applications of finite element analysis to shell buckling prediction. - Proc. Second Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Ohio, 1969, p. 42-46.

3. Rao G.V., Radhamahan S.K., Raju J.S. Reinvestigation of buckling of shells of revolution by a refined finite element. - AIAAJ, 1974, v. 12, N1, p. 51-54.

4. Кислоокий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А. Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек. - Проблемы прочности, 1977, № 7, с. 25-32.

5. Rao G. Venkateswara, Raju I.J., Radhamahan S.K. Buckling of shells by finite element method. - J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1974, 100, N5, p. 1092-1096.

6. Кабанов В.В., Железнов Л.П. Исследование устойчивости цилиндрических оболочек при неоднородном напряженном состоянии методом конечных элементов. - Прикладная механика, 1978, т.XIУ, № 3, с. 45-52.

7. Постнов В.А., Корнеев В.С. Изгиб и устойчивость оболочек вращения. - Тр. X Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Кутаиси, 1975, т. I. - Тбилиси: Мецниереба, 1975, с. 635-644.

8. Куранов Б.А. Прочность и устойчивость оболочек вращения, подкрепленных нерегулярным набором кольцевых ребер. Расчеты на прочность. - М.: Машиностроение, 1977. - 326 с.

9. Кантин, Клауя. Искривленный дискретный элемент цилиндрической оболочки. - Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 6, с. 82-88.

10. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. - Л.: Судостроение, 1974. - 344 с.

II. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек. - Итоги науки. Механика твердых деформируемых тел. - М.: ВИНИТИ, 1969. - 348 с.