ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 4, 1978

УДК 531.01+539.374

Б.А.Горлач, Н.Н.Орлов

О ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ КОНТРАВАРИАНТНЫМИ БАЗИСНЫМИ ВЕКТОРАМИ ДЛЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД

В геометрически нелинейных задачах механики деформируемых сплошных сред различают метрики исходного и конечного состояний. При решении таких задач широко используется зависимость между ковариантными базисными векторами метрики конечного состояния и ковариантными базисными векторами исходного состояния. В данной работе выводится аналогичная зависимость между контравариантными базисными векторами конечного и исходного состояний.

Основные обозначения

Строчные латинские буквы и символ ∇ относятся к метрике исходного состояния, аналогичные прописные буквы – к метрике конечного состояния.

$\bar{r}$, $\bar{R}$, $\bar{r}_s$, $\bar{R}_s$, $\bar{r}^s$, $\bar{R}^s$ – радиусы-векторы произвольной точки, их ко- и контравариантные базисные векторы соответственно;

ξ_s – материальные координаты точек тела;

$\nabla = \bar{r}^s \frac{\partial}{\partial \xi_s}$, $\tilde{\nabla} = \bar{R}^s \frac{\partial}{\partial \xi_s}$ – набла-операторы Гамильтона;

$\hat{E}$ – единичный тензор;

e^{smn}, e_{smn} – символы Леви-Чивита;

$\bar{u}$ – вектор перемещения точки из исходного состояния в конечное;

i_1, i_2, i_3 – главные инварианты тензора $\nabla \bar{u}$;

δ^s_k – символ Кронекера.

Для представления контравариантного базисного вектора $\bar{R}^s$, характеризующего метрику конечного состояния, через базисные векторы $\bar{r}^s$ и градиент вектора перемещения $\nabla \bar{u}$ запишем формулы [1]:

$$\bar{R}_s = (\delta_s^k + \nabla_s u^k)\bar{r}_k, \tag{I}$$

$$\bar{R}_s = \frac{e^{smn}}{2\sqrt{G}}\bar{R}_m \times \bar{R}_n. \tag{2}$$

Здесь

$$G = \frac{1}{6} e^{smn} \bar{R}_s (\bar{R}_m \times \bar{R}_n). \tag{3}$$

Подставляя (I) в (2) и воспользовавшись равенствами [I]

$$\bar{r}_t \times \bar{r}_k = \sqrt{g}\, e_{qtk} \bar{r}^q,$$

$$\sqrt{g} = \frac{1}{6} e^{smn} \bar{r}_s (\bar{r}_m \times \bar{r}_n).$$

получим

$$\bar{R}^s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{G}}\, e^{smn}(e_{qmn} + 2\nabla_m u^t e_{qtn} + \nabla_m u^t \nabla_n u^k e_{qtk})\bar{r}^q. \tag{4}$$

Используя свойства символов Леви-Чивита [2]

$$e^{smn} e_{qtk} = \delta_q^s \delta_t^m \delta_k^n + \delta_q^n \delta_t^s \delta_k^m + \delta_q^m \delta_t^n \delta_k^s - \\ - \delta_q^m \delta_t^s \delta_k^n - \delta_q^n \delta_t^m \delta_k^s - \delta_q^s \delta_t^n \delta_k^m, \tag{5}$$

$$e^{smn} e_{qtn} = \delta_q^s \delta_t^m - \delta_t^s \delta_q^m, \tag{6}$$

$$e^{smn} e_{qmn} = 2\delta_q^s, \tag{7}$$

$$e^{smn} e_{smn} = 6, \tag{8}$$

приведем (4) к виду

$$\bar{R}^s = C^{-1}\Big[\big(1 + \nabla_m u^m + \frac{1}{2}\nabla_m u^m \nabla_n u^n - \frac{1}{2}\nabla_m u^n \nabla_n u^m\big)\delta_q^s - \\ - \nabla_q u^s + \nabla_m u^s \nabla_q u^m - \nabla_m u^m \nabla_q u^s\Big]\bar{r}^q. \tag{9}$$

Здесь

$$C = \sqrt{\frac{G}{g}}. \tag{I0}$$

Для упрощения формулы (9) запишем выражения для главных инвариантов градиента вектора перемещения $\nabla\bar{u}$ [I]:

$$i_1 = \nabla_m u^m, \tag{II}$$

$$i_2 = \frac{1}{2}(\nabla_m u^m \nabla_n u^n - \nabla_m u^n \nabla_n u^m), \tag{I2}$$

$$i_3 = \frac{1}{6} e^{smn} e_{kpq} \nabla_s u^k \nabla_m u^p \nabla_n u^q). \tag{I3}$$

Тогда

$$\bar{R}^s = c^{-1}[(1+i_1+i_2)\bar{r}^s - (1+i_1)\nabla_q u^s \bar{r}^q + \nabla_m u^s \nabla_q u^m \bar{r}^q].$$

Последнее равенство можно представить в тензорном виде

$$R^s = \tilde{\nabla}\bar{r} \cdot \bar{r}^s,$$

где

$$\tilde{\nabla}\bar{r} = \bar{R}^k \bar{r}_k = \bar{c}^1 [(1+i_1+i_2)\hat{E} - (1+i_1)\nabla\bar{u} + \nabla\bar{u}\cdot\nabla\bar{u}]. \tag{I4}$$

С использованием формул для главных инвариантов тензора $\nabla\bar{u}$ (II)-(I3) соотношение (IO) перепишется так [3]:

$$c = 1 + i_1 + i_2 + i_3.$$

Имея зависимость (I4), можно, например, получить связь между градиентами вектора перемещения конечного и исходного состояний.

Из равенства $\bar{R} = \bar{r} + \bar{u}$ следует

$$\bar{R}^s \frac{\partial\bar{R}}{\partial\xi_s} = \bar{R}^s \frac{\partial\bar{r}}{\partial\xi_s} + \bar{R}^s \frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi_s}$$

или

$$\tilde{\nabla}\bar{u} = \hat{E} - \tilde{\nabla}\bar{r}.$$

Подставляя (I4) в последнее выражение, после некоторых преобразований получим требуемое соотношение

$$\tilde{\nabla}\bar{u} = \bar{c}^1[i_3\hat{E} + (1+i_1)\nabla\bar{u} - \nabla\bar{u}\cdot\nabla\bar{u}] =$$

$$= \nabla\bar{u} + \bar{c}^1[i_3\hat{E} - (i_2+i_3)\nabla\bar{u} - \nabla\bar{u}\cdot\nabla\bar{u}].$$

Литература

I. Лурье А.И. Теория упругости. М., "Наука", I970.
2. Бондарь В.Д. Лекции по курсу "Введение в механику сплошных сред". Новосибирск, изд. НГУ, I967.
3. Блох В.И. Теория упругости. Харьков, изд. ХГУ, I964.

7-7623